И.Макдональд

Симметрические функции и многочлены Холла

Монография известного английского математика, знакомого советским читателям по переводу книги «Введение в коммутативную алгебру» (М.: Мир, 1972), содержит обширный материал по теории симметрических функций, начиная с классических результатов Якоби, Фробениуса, Шура, Юнга и др. вплоть до работ самого последнего времени. Дано первое в мировой литературе полное изложение теории и приложений многочленов Холла.

Для математиков различных специальностей, аспирантов и студентов университетов, а также физиков, использующих в своей работе групповые методы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Формальная цель книги, предлагаемой вниманию читателей, — подробное изложение свойств так называемых многочленов Холла. Такое изложение появляется впервые, хотя эти многочлены были введены Ф. Холлом еще в 1950-х годах. При первом взгляде на определение этих многочленов (см. ниже предисловие автора) может показаться, что область их применимости весьма ограничена. Оказывается, однако, что они естественно возникают во многих ситуациях. Два приложения многочленов Холла к теории представлений групп приведены в двух последних главах книги — здесь вычислены характеры полной линейной группы над конечным полем, а также сферические функции полной линейной группы над $\mathfrak{p}$-адическим полем относительно ее максимальной компактной подгруппы. Специалист оценит важность этих результатов; однако значение многочленов Холла и ценность книги И. Макдональда ими далеко не исчерпываются.

Теория многочленов Холла тесно связана с классической теорией симметрических функций. Эта теория берет начало в работах И. Ньютона, Э. Варинга, К. Г. Я. Якоби и К. Костки, а в нашем веке ее развитие связано с именами И. Шура, А. Юнга, А. Ричардсона, Д. Е. Литтлвуда и многих других математиков. В ней много красивых неожиданных тождеств, кульминацией которых является знаменитое правило Литтлвуда — Ричардсона для умножения функций Шура. Изложению теории симметрических функций посвящена первая глава книги, представляющая большой самостоятельный интерес.

Интерес к теории симметрических функций в последние годы возродился с новой силой, в основном в связи с приложениями к комбинаторике, алгебраической геометрии и теории представлений. В комбинаторике симметрические функции играют важную роль в исследовании таких объектов как перестановки, целочисленные матрицы, диаграммы и таблицы Юнга, разбиения и их многомерные аналоги и т. д. Приложения к алгебраической геометрии охватывают исчисление Шуберта, теорию характеристических классов и теорию λ-колец Гротендика. В теории представлений помимо уже упоминавшихся приложений, симметрические функции играют важную роль при изучении представлений симметрических групп, унитарных групп, полных линейных групп над $\mathbb{C}$, а также остальных классических компактных и комплексных групп. Из совсем новых областей приложения симметрических функций отметим активно развивающуюся сейчас теорию представлений бесконечномерных групп и алгебр Ли и тесно

связанные с ней теории интегрируемых систем, модулярных функций и т. д. Многие из этих приложений, включая совсем недавние, отражены в книге И. Макдональда, иногда в основном тексте, а чаще — в так называемых примерах, помещенных в конце разделов и дополняющих основной текст.

Из сказанного ясно, что книга И. Макдональда представляет интерес для широкого круга математиков. Она также будет полезна физикам, использующим групповые методы; например, упомянутое выше правило Литтлвуда — Ричардсона интерпретируется как правило для вычисления коэффициентов Клебша — Гордана для унитарных групп.

И. Макдональд известен своим педагогическим мастерством (достаточно вспомнить его в соавторстве с М. Атьей прекрасную книгу «Введение в коммутативную алгебру»). Эта монография также написана великолепно — лаконично и в то же время очень четко и ясно; сильное впечатление производит стремление автора, не жертвуя современностью изложения, сохранить дух и красоту классических аргументов. Исключительная тщательность и продуманность в выборе терминологии и обозначений должна, мне кажется, сделать эту книгу стандартным источником ссылок по симметрическим функциям и их приложениям.

К русскому изданию автор прислал ряд существенных исправлений и добавлений. При переводе мною с одобрения автора также добавлен ряд замечаний, примеров и литературных ссылок, а также написано небольшое приложение к гл. II, содержащее другое доказательство основной теоремы Ф. Холла (в сочетании с аргументами автора оно позволяет заменить приведенное Макдональдом довольно сложное комбинаторное доказательство правила Литтлвуда — Ричардсона чисто алгебраическим доказательством, что, как мне кажется, больше отвечает духу этой книги). Добавления автора выделены в тексте знаком *, а добавления переводчика — знаком °. Эти добавления в основном отражают результаты, непосредственно примыкающие к содержанию книги и полученные после ее выхода в свет. Пользуюсь случаем поблагодарить проф. Макдональда за внимание, проявленное им к русскому изданию.

Монография И. Макдональда пользуется заслуженной популярностью. Об этом, в частности, свидетельствует появление очень интересной и содержащей богатый фактический материал рецензии Р. Стенли [19°] (часть этого материала была использована при переводе). Нет сомнения, что книга будет по достоинству оценена советскими читателями.

Май 1984 г. *А. В. Зелевинский*

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Это русское издание — не просто перевод английского оригинала. При переводе добавлено значительное количество нового материала (не считая мелких исправлений и улучшений), в значительной степени благодаря переводчику (например, им дано новое доказательство теоремы Ф. Холла в гл. II). Таким образом, эта книга по существу есть перевод (несуществующего) второго издания.

Я хотел бы выразить А. В. Зелевинскому глубокую благодарность за исключительную добросовестность, с которой он отнесся к своей задаче, и за многочисленные улучшения.

Лондон
Апрель 1984 г.

И. Г. Макдональд

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта монография — запоздалое выполнение взятого автором несколько лет назад обязательства опубликовать замкнутое изложение теории многочленов Холла и связанных с ними тем.

Эти многочлены были определены Филипом Холлом в 1950-х годах первоначально следующим образом. Если M — конечная абелева p-группа, то она разлагается в прямую сумму циклических подгрупп порядков, скажем, p^{λ_1}, p^{λ_2}, ..., p^{λ_r}, где для определенности $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$. Последовательность показателей $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ есть разбиение, которое называется типом группы M и описывает M с точностью до изоморфизма. Если даны еще два разбиения μ и ν, то мы обозначим через $g^{\lambda}_{\mu\nu}(p)$ число подгрупп N в M, таких, что N имеет тип μ, а M/N — тип ν. Холл показал, что $g^{\lambda}_{\mu\nu}$ как функция от p является многочленом с целыми коэффициентами, и определил степень и старший коэффициент этого многочлена Эти многочлены и есть многочлены Холла.

В более общей ситуации вместо конечных абелевых p-групп мы можем рассмотреть модули конечной длины над дискретно нормированным кольцом $\mathfrak{o}$ с конечным полем вычетов: вместо $g^{\lambda}_{\mu\nu}(p)$ мы получим тогда $g^{\lambda}_{\mu\nu}(q)$, где q — число элементов поля вычетов.

В дальнейшем Холл использовал эти многочлены для построения алгебры, отражающей строение решетки конечных $\mathfrak{o}$-модулей. Обозначим через $H(q)$ свободный $\mathbf{Z}$-модуль с базисом (u_λ), параметризованным множеством всех разбиений λ, и определим умножение в $H(q)$, используя $g^{\lambda}_{\mu\nu}(q)$ как структурные константы, т. е. положим

$$u_\mu u_\nu = \sum_\lambda g^{\lambda}_{\mu\nu}(q)\, u_\lambda.$$

Нетрудно показать (подробности см. в гл. II), что $H(q)$ есть коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, свободно порожденное (как $\mathbf{Z}$-алгебра) образующими $u_{(1^r)}$, отвечающими элементарным $\mathfrak{o}$-модулям.

Симметрические функции теперь вступают в игру следующим образом. Кольцо симметрических многочленов от n не-

зависимых переменных является кольцом многочленов $\mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$, порожденным элементарными симметрическими функциями $e_1, \ldots, e_n$. Переходя к пределу по n, мы получим кольцо $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ симметрических функций от бесконечного числа переменных. Значит, можно изоморфно отобразить $H(q)$ на Λ, переводя каждую образующую $u_{(1^r)}$ в элементарную симметрическую функцию e_r. Оказывается, однако, что лучший выбор состоит в том, чтобы определить гомоморфизм ψ: $H(q) \to \Lambda \otimes \mathbb{Q}$, полагая $\psi(u_{(1^r)}) = q^{-r(r-1)/2} e_r$ для всех $r \geqslant 1$. Мы получаем семейство симметрических функций $\psi(u_\lambda)$, параметризованное разбиениями. Эти симметрические функции по существу есть функции Холла — Литтлвуда, которые являются предметом гл. III. Итак, комбинаторные свойства решетки конечных $\mathfrak{o}$-модулей отражаются в умножении функций Холла — Литтлвуда.

Таким образом, в основании теории Холла лежит формализм симметрических функций, и гл. I посвящена изложению этого формализма — различных типов симметрических функций, в особенности функций Шура (S-функций), и взаимосвязей между ними. В этом контексте естественно появляется теория характеров симметрических групп в том виде, как она была первоначально развита Фробениусом. В приложении мы показываем, как S-функции возникают «в природе» как следы полиномиальных функторов на категории конечномерных векторных пространств над полем характеристики 0.

За последние несколько лет значительно прояснилась комбинаторная подструктура, основанная на «jeu de taquin»[1]), которая лежит в основе формализма S-функций и, в частности, правила Литтлвуда — Ричардсона (гл. I, § 9). Я не излагаю ее отчасти из-за желания сохранить разумный объем книги, а отчасти потому, что ее полное изложение было недавно опубликовано Шютценберже — главным творцом этой теории [46].

Свойства многочленов Холла и алгебры Холла развиты в гл. II, а симметрических функций Холла — Литтлвуда — в гл. III. Это — симметрические функции, включающие параметр t, которые сводятся к S-функциям при $t = 0$ и к моно-

[1]) jeu de taquin — название игры типа распространенной у нас игры «15». Здесь это некоторый комбинаторный алгоритм. — *Прим. перев.*

миальным симметрическим функциям при $t = 1$. Многие их свойства обобщают известные свойства S-функций.

Наконец, гл. IV и V содержат приложения формализма, развитого в предыдущих главах. Глава IV — это изложение работы Дж. А. Грина [14] о характерах полных линейных групп над конечным полем; как и в случае теории характеров симметрических групп, мы стремились выявить роль симметрических функций. Глава V также посвящена полным линейным группам, но на этот раз не над конечным, а над локальным неархимедовым полем, и вместо характеров мы вычисляем сферические функции. В обоих этих случаях теория Холла играет решающую роль.

Куин Мери Колледж *И. Г. Макдональд*
Лондон 1979

Глава I

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Разбиения

Многие из объектов, рассматриваемых в этой книге, будут параметризованы разбиениями. Цель этого раздела — ввести обозначения и терминологию, которые будут использоваться на протяжении всей книги, и изложить ряд элементарных результатов об упорядочениях разбиений, которые понадобятся в дальнейшем.

Разбиения

Разбиением называется произвольная (конечная или бесконечная) последовательность

$$\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r,\ \ldots) \tag{1.1}$$

целых неотрицательных чисел, расположенных в порядке (нестрогого) убывания, т. е.

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r \geqslant \ldots,$$

и содержащая лишь конечное число ненулевых членов. Нам будет удобно не различать две такие последовательности, отличающиеся лишь цепочкой нулей на конце. Например, мы рассматриваем (2,1), (2,1,0), (2,1,0,0, ...) как одно и то же разбиение.

Ненулевые члены λ_i в (1.1) называются *частями* разбиения λ. Число частей разбиения λ называется его *длиной* и обозначается через $l(\lambda)$, а сумма всех частей называется его *весом* и обозначается через $|\lambda|$:

$$|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\ldots.$$

Если $|\lambda|=n$, то мы говорим, что λ — *разбиение числа n*. Множество всех разбиений числа n обозначается через $\mathscr{P}_n$, а множество всех разбиений — через $\mathscr{P}$. В частности, $\mathscr{P}_0$ состоит из одного элемента — единственного разбиения числа 0, которое мы обозначим через 0.

Иногда удобно использовать обозначение, указывающее, сколько раз каждое целое число входит в данное разбиение как часть: запись

$$\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}\ldots)$$

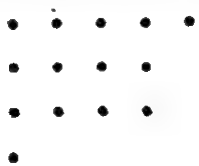
означает, что в точности m_i частей разбиения λ равны i. Число

(1.2) $$m_i = m_i(\lambda) = \mathrm{Card}\,\{j\colon \lambda_j = i\}$$

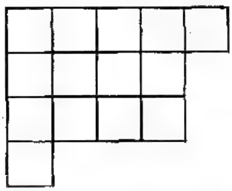
называется *кратностью* числа i в разбиении λ.

Диаграммы

Диаграмму разбиения λ можно формально определить как множество точек $(i, j) \in Z^2$, таких, что $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$. Рисуя такие диаграммы, мы примем соглашение, как и при изображении матриц, что первая координата i (индекс строки) возрастает при движении сверху вниз, а вторая координата j (индекс столбца) возрастает при движении слева направо[1]. Например, разбиение (5441) имеет диаграмму



состоящую из пяти точек в верхней строке, четырех во второй, четырех в третьей и одной в четвертой строке. Чаще бывает удобно заменить точки квадратами; в этом случае последняя диаграмма выглядит так:



Мы будем обычно обозначать диаграмму разбиения λ тем же символом λ.

Сопряженным к разбиению λ называется разбиение λ', диаграмма которого получается из диаграммы λ транспонированием, т. е. отражением относительно главной диагонали. Таким образом, λ'_i есть число точек в i-м столбце диаграммы λ, или, что эквивалентно,

(1.3) $$\lambda'_i = \mathrm{Card}\,\{j\colon \lambda_j \geqslant i\}.$$

[1] Некоторые авторы (особенно франкоязычные) предпочитают соглашение из координатной геометрии (при котором первая координата возрастает слева направо, а вторая — снизу вверх) и определяют диаграмму λ как множество $(i, j) \in Z^2$, таких, что $1 \leqslant i \leqslant \lambda_j$. Читателям, предпочитающим это соглашение, следует читать эту книгу, держа ее вверх ногами перед зеркалом.

В частности, $\lambda'_1 = l(\lambda)$ и $\lambda_1 = l(\lambda')$. Очевидно, что $\lambda'' = \lambda$.

Например, разбиение, сопряженное к (5441), — это (43331).

Из (1.2) и (1.3) мы получаем, что

(1.4) $$m_i(\lambda) = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}.$$

Для каждого разбиения λ положим

(1.5) $$n(\lambda) = \sum_{i \geqslant 1} (i-1)\lambda_i,$$

так что $n(\lambda)$ есть сумма чисел, полученных, если приписать нуль каждой точке верхней строки диаграммы λ, единицу каждой точке второй строки и т. д. Складывая эти числа по столбцам, мы видим, что

(1.6) $$n(\lambda) = \sum_{i \geqslant 1} \binom{\lambda'_i}{2}.$$

Иногда оказывается полезным другое обозначение для разбиений, принадлежащее Фробениусу. Предположим, что главная диагональ диаграммы λ состоит из r точек (i, i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$. При $1 \leqslant i \leqslant r$ пусть $\alpha_i = \lambda_i - i$ — число точек в i-й строке диаграммы λ справа от точки (i, i), а $\beta_i = \lambda'_i - i$ — число точек в i-м столбце λ под точкой (i, i). Тогда $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r \geqslant 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_r \geqslant 0$, и мы обозначаем разбиение λ через

$$\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r \mid \beta_1, \ldots, \beta_r) = (\alpha \mid \beta).$$

Ясно, что сопряженным к $(\alpha|\beta)$ разбиением является $(\beta|\alpha)$.

Например, если $\lambda = (5441)$, то $\alpha = (421)$ и $\beta = (310)$.

(1.7) *Пусть λ — разбиение, и пусть $m \geqslant \lambda_1$, $n \geqslant \lambda'_1$. Тогда $m+n$ чисел*

$$\lambda_i + n - i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad n - 1 + j - \lambda'_j \quad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

образуют перестановку множества $\{0, 1, 2, \ldots, m+n-1\}$.

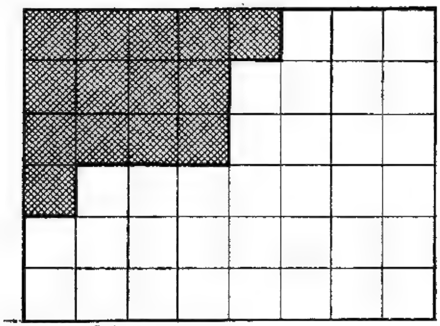
Доказательство. Диаграмма λ содержится в диаграмме (m^n), являющейся $(n \times m)$-прямоугольником. Занумеруем последовательные отрезки граничной линии между λ и ее дополнением в (m^n) (жирной линии на приведенном ниже рисунке) числами $0, 1, \ldots, m+n-1$, начиная снизу. Вертикальным отрезкам отвечают числа $\lambda_i + n - i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$[1]; с помощью транспонирования мы убеждаемся, что горизон-

---

[1]) Поскольку отрезку, пересекающему i-ю строку, предшествуют λ_i горизонтальных отрезков и $n-i$ вертикальных. — *Прим. перев.*

тальным отрезкам отвечают числа

$$(m+n-1)-(\lambda'_j+m-j)=n-1+j-\lambda'_j \quad (1\leqslant j\leqslant m). \blacksquare$$



$\lambda=(54^21), m=8; n=6$

Положим

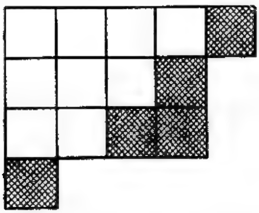
$$f_{\lambda,n}(t)=\sum_{i=1}^{n} t^{\lambda_i+n-i}.$$

Тогда (1.7) эквивалентно тождеству

$$(1.7') \qquad f_{\lambda,n}(t)+t^{m+n-1}f_{\lambda',m}(t^{-1})=(1-t^{m+n})/(1-t).$$

Косые диаграммы и таблицы

Если λ и μ — разбиения, то запись $\lambda\supset\mu$ будет означать, что диаграмма разбиения λ содержит диаграмму разбиения μ, т. е. что $\lambda_i\geqslant\mu_i$ для всех $i\geqslant 1$. Теоретико-множественная разность $\theta=\lambda-\mu$ называется *косой диаграммой.* Например, если $\lambda=(5441)$ и $\mu=(432)$, то косая диаграмма $\lambda-\mu$ есть заштрихованная область на следующем рисунке:



Путем в косой диаграмме θ называется последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_m$ квадратов из этой диаграммы, такая, что при $1\leqslant i\leqslant m$ квадраты x_{i-1} и x_i имеют общую сторону. Говорят, что подмножество φ диаграммы θ *связно*, если любые два квадрата из этого подмножества можно соединить в нем путем. Максимальные связные подмножества в θ сами яв-

ляются косыми диаграммами, называемыми *связными компонентами* θ. В приведенном выше примере имеются три связные компоненты.

*Косая диаграмма θ называется *косым крюком*, если она связна и не содержит никакого 2×2-блока из квадратов, т.е. последовательные строки (или столбцы) θ перекрываются в точности по одному квадрату. Если $|\theta|=p$, то θ называется косым *p-крюком**.

Сопряженной к косой диаграмме $\theta=\lambda-\mu$ называется косая диаграмма $\theta'=\lambda'-\mu'$. Положим $\theta_i=\lambda_i-\mu_i$, $\theta_i'=\lambda_i'-\mu_i'$ и

$$|\theta|=\sum\theta_i=|\lambda|-|\mu|.$$

Косая диаграмма θ называется *горизонтальной m-полосой* (соответственно *вертикальной m-полосой*), если $|\theta|=m$ и $\theta_i'\leqslant 1$ (соответственно $\theta_i\leqslant 1$) для всех $i\geqslant 1$. Иными словами, горизонтальная (соответственно вертикальная) полоса имеет не более одного квадрата в каждом столбце (соответственно строке).

Таблицей T называется последовательность разбиений

$$\mu=\lambda^{(0)}\subset\lambda^{(1)}\subset\ \dots\ \lambda^{(r)}=\lambda,$$

такая, что все косые диаграммы $\theta^{(i)}=\lambda^{(i)}-\lambda^{(i-1)}$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ являются горизонтальными полосами. Графически T можно описать, занумеровав каждый квадрат косой диаграммы $\theta^{(i)}$ числом i (при $1\leqslant i\leqslant r$), и мы будем часто представлять себе таблицу как косую диаграмму, занумерованную таким образом. Числа, расставленные в квадратах косой диаграммы $\lambda-\mu$, должны возрастать сверху вниз в каждом столбце и не убывать слева направо в каждой строке. Косая диаграмма $\lambda-\mu$ называется *формой* таблицы T, а последовательность $(|\theta^{(1)}|,\ \dots,\ |\theta^{(r)}|)$ — *весом* этой таблицы.

Стандартной таблицей называется таблица T, в которой каждое из чисел $1, 2, \dots, r$ встречается ровно один раз, так что ее вес есть $(1, 1, \dots, 1)$.

Сложение разбиений

Пусть λ и μ — разбиения. Определим разбиение $\lambda+\mu$ как сумму последовательностей λ и μ:

$$(\lambda+\mu)_i=\lambda_i+\mu_i.$$

Определим также $\lambda\cup\mu$ как разбиение, части которого есть части λ и части μ, расположенные в невозрастающем порядке. Например, если $\lambda=(321)$ и $\mu=(22)$, то $\lambda+\mu=(541)$ и $\lambda\cup\mu=(32221)$.

Операции $+$ и $\cup$ двойственны друг к другу:

(1.8) $$(\lambda \cup \mu)' = \lambda' + \mu'.$$

Доказательство. Чтобы получить диаграмму $\lambda \cup \mu$, надо взять строки диаграмм λ и μ и расположить их в порядке убывания длин. Значит, длина i-го столбца $\lambda \cup \mu$ есть сумма длин i-х столбцов λ и μ, т. е.

$$(\lambda \cup \mu)'_i = \lambda'_i + \mu'_i. \blacksquare$$

Упорядочения

Обозначим через L_n *обратное лексикографическое упорядочение* множества $\mathscr{P}_n$ разбиений числа n: по определению L_n есть подмножество в $\mathscr{P}_n \times \mathscr{P}_n$, состоящее из таких пар (λ, μ), что либо $\lambda = \mu$, либо первая не обращающаяся в 0 разность $\lambda_i - \mu_i$ *положительна.* Оно является линейным упорядочением. Например, при $n = 5$ упорядочение L_n располагает элементы $\mathscr{P}_5$ в последовательность

$$(5),\quad (41),\quad (32),\quad (31^2),\quad (2^21),\quad (21^3),\quad (1^5).$$

Другим линейным упорядочением множества $\mathscr{P}_n$ является L'_n — множество пар (λ, μ), таких, что либо $\lambda = \mu$, либо первая не обращающаяся в 0 разность $\tilde{\lambda}_i - \tilde{\mu}_i$ *отрицательна,* где $\tilde{\lambda}_i = \lambda_{n+1-i}$. При $n \geqslant 6$ упорядочения L_n и L'_n различны. Например, если $\lambda = (31^3)$ и $\mu = (2^3)$, то $(\lambda, \mu) \in L_6$ и $(\mu, \lambda) \in \in L'_6$.

(1.9) *Пусть* $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n$. *Тогда*

$$(\lambda, \mu) \in L'_n \Leftrightarrow (\mu', \lambda') \in L_n.$$

Доказательство. Предположим, что $(\lambda, \mu) \in L'_n$ и $\lambda \neq \mu$. Тогда для некоторого целого $i \geqslant 1$ имеем $\lambda_i < \mu_i$ и $\lambda_j = \mu_j$ при $j > i$. Если мы положим $k = \lambda_i$ и рассмотрим диаграммы λ и μ, то сразу увидим, что $\lambda'_j = \mu'_j$ при $1 \leqslant j \leqslant k$ и $\lambda'_{k+1} < < \mu'_{k+1}$, так что $(\mu', \lambda') \in L_n$. Обратное утверждение доказывается аналогично. $\blacksquare$

Более важным, чем L_n или L'_n, является *естественное* (частичное) *упорядочение* N_n множества $\mathscr{P}_n$, определяемое следующим образом:

$$(\lambda, \mu) \in N_n \Leftrightarrow \lambda_1 + \ldots + \lambda_i \geqslant \mu_1 + \ldots + \mu_i \text{ для всех } i \geqslant 1.$$

При $n \geqslant 6$ оно не является линейным упорядочением. Например, разбиения (31^3) и (2^3) несравнимы в смысле N_6.

Мы будем писать $\lambda \geqslant \mu$ вместо $(\lambda, \mu) \in N_n$.

(1.10) *Пусть* $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n$. *Тогда*

$$\lambda \geqslant \mu \Rightarrow (\lambda, \mu) \in L_n \cap L_n'.$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda \geqslant \mu$. Тогда либо $\lambda_1 > \mu_1$, и в этом случае $(\lambda, \mu) \in L_n$, либо $\lambda_1 = \mu_1$. В последнем случае либо $\lambda_2 > \mu_2$, и тогда снова $(\lambda, \mu) \in L_n$, либо $\lambda_2 = \mu_2$. Продолжая в том же духе, мы убеждаемся, что $(\lambda, \mu) \in L_n$.

Кроме того, для каждого $i \geqslant 1$

$$\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \ldots = n - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_i) \leqslant \leqslant n - (\mu_1 + \ldots + \mu_i) = \mu_{i+1} + \mu_{i+2} + \ldots .$$

Значит, то же рассуждение, что и выше, показывает, что $(\lambda, \mu) \in L_n'$. ∎

Замечание. Вообще говоря, неверно, что $N_n = L_n \cap L_n'$. Например, если $n = 12$ и $\lambda = (63^2)$, $\mu = (5^2 1^2)$, то $(\lambda, \mu) \in L_{12} \cap L_{12}'$, но $(\lambda, \mu) \notin N_{12}$.

(1.11) *Пусть* $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n$. *Тогда*

$$\lambda \geqslant \mu \Leftrightarrow \mu' \geqslant \lambda'.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать одну импликацию. Предположим, что $\mu' \not\geqslant \lambda'$. Тогда для некоторого $i \geqslant 1$

$$\lambda_1' + \ldots + \lambda_j' \leqslant \mu_1' + \ldots + \mu_j' \quad (1 \leqslant j \leqslant i-1)$$

и

$$\lambda_1' + \ldots + \lambda_i' > \mu_1' + \ldots + \mu_i', \tag{1}$$

откуда вытекает, что $\lambda_i' > \mu_i'$.

Пусть $l = \lambda_i'$, $m = \mu_i'$. Из (1) следует, что

$$\lambda_{i+1}' + \lambda_{i+2}' + \ldots < \mu_{i+1}' + \mu_{i+2}' + \ldots . \tag{2}$$

Далее, $\lambda_{i+1}' + \lambda_{i+2}' + \ldots$ равно числу точек диаграммы λ, лежащих справа от i-го столбца; значит,

$$\lambda_{i+1}' + \lambda_{i+2}' + \ldots = \sum_{j=1}^{l} (\lambda_j - i).$$

Аналогично

$$\mu_{i+1}' + \mu_{i+2}' + \ldots = \sum_{j=1}^{m} (\mu_j - i).$$

Поэтому из (2) мы получаем

$$\sum_{j=1}^{m}(\mu_j - i) > \sum_{j=1}^{l}(\lambda_j - i) \geqslant \sum_{j=1}^{m}(\lambda_j - i), \tag{3}$$

где правое неравенство выполняется, поскольку $l > m$ и $\lambda_j \geqslant i$ при $1 \leqslant j \leqslant l$. В силу (3)

$$\mu_1 + \ldots + \mu_m > \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$$

и, следовательно, $\lambda \not\geqslant \mu$. ∎

Повышающие операторы

В этом подразделе мы будем работать не с разбиениями, а с целочисленными векторами $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Симметрическая группа S_n действует на $\mathbb{Z}^n$ перестановками координат, и множество

$$P_n = \{b \in \mathbb{Z}^n : b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n\}$$

есть фундаментальная область для этого действия, т. е. S_n-орбита каждого $a \in \mathbb{Z}^n$ пересекает P_n ровно в одной точке, которую мы обозначим через a^+. Таким образом, a^+ получается, если расположить $a_1, \ldots, a_n$ в порядке убывания.

Для $a, b \in \mathbb{Z}^n$ отношение $a \geqslant b$ по определению означает, как и выше, что

$$a_1 + \ldots + a_i \geqslant b_1 + \ldots + b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

(1.12) *Пусть $a \in \mathbb{Z}^n$. Тогда*

$$a \in P_n \Leftrightarrow a \geqslant wa \text{ для всех } w \in S_n.$$

Доказательство. Пусть $a \in P_n$, т. е. $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Если $wa = b$, то $(b_1, \ldots, b_n)$ есть перестановка последовательности $(a_1, \ldots, a_n)$ и, значит,

$$a_1 + \ldots + a_i \geqslant b_1 + \ldots + b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

так что $a \geqslant b$.

Обратно, если $a \geqslant wa$ для всех $w \in S_n$, то, в частности,

$$(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n)$$

при $1 \leqslant i \leqslant n-1$, откуда следует, что

$$a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_i \geqslant a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1},$$

т. е. $a_i \geqslant a_{i+1}$. Поэтому $a \in P_n$. ∎

Пусть $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0) \in P_n$.

(1.13) *Пусть $a \in P_n$. Тогда для всех $w \in S_n$*

$$(a + \delta - w\delta)^+ \geqslant a.$$

Доказательство. Поскольку $\delta \in P_n$, в силу (1.12) $\delta \geqslant w\delta$, откуда $a+\delta-w\delta \geqslant a$. Пусть $b=(a+\delta-w\delta)^+$. Снова применяя (1.12), получаем, что $b \geqslant a+\delta-w\delta$. Значит, $b \geqslant a$. ∎

Для каждой пары целых чисел i, j, таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$, определим отображение R_{ij}: $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ формулой

$$R_{ij}(a)=(a_1, \ldots, a_i+1, \ldots, a_j-1, \ldots, a_n).$$

Любое произведение вида $R=\prod\limits_{i<j} R_{ij}^{r_{ij}}$ называется *повышающим оператором.* Порядок сомножителей не имеет значения, поскольку они коммутируют между собой.

(1.14) *Пусть $a \in \mathbb{Z}^n$, а R — повышающий оператор. Тогда $Ra \geqslant a$.*

Доказательство. В самом деле, можно считать, что $R=R_{ij}$, а в этом случае утверждение очевидно. ∎

Верно и обратное утверждение:

(1.15) *Пусть $a, b \in \mathbb{Z}^n$ такие, что $a \leqslant b$ и $a_1+\ldots+a_n=b_1+\ldots+b_n$. Тогда найдется повышающий оператор R, такой, что $b=Ra$.*

Доказательство. Можно взять

$$R=\prod_{k=1}^{n-1} R_{k,k+1}^{r_k}, \text{ где } r_k=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i) \geqslant 0. \blacksquare$$

(1.16)* *Если λ и μ — разбиения числа n, такие, что $\lambda > \mu$, причем они являются соседями при естественном упорядочении (т. е. из неравенств $\lambda \geqslant \nu \geqslant \mu$ вытекает, что либо $\nu=\lambda$, либо $\nu=\mu$), то $\lambda=R_{ij}\mu$ для некоторых $i<j$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\lambda_1 > \mu_1$, и пусть $i \geqslant 2$ — наименьший индекс, для которого $\lambda_1+\ldots+\lambda_i=\mu_1+\ldots+\mu_i$. Тогда $\mu_i > \lambda_i \geqslant \lambda_{i+1} \geqslant \mu_{i+1}$, так что $\mu_i > \mu_{i+1}$. Следовательно, $\nu=R_{1i}\mu$ является разбиением, и ясно, что $\lambda \geqslant \nu$. Значит, $\lambda=\nu=R_{1i}\mu$.

Если же $\lambda_1=\mu_1$, то для некоторого $j>1$ имеем $\lambda_k=\mu_k$ при $k<j$ и $\lambda_j>\mu_j$; применим теперь предыдущее рассуждение к разбиениям $(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots)$ и $(\mu_j, \mu_{j+1}, \ldots)$. ∎

Примеры

1. Пусть λ — разбиение. *Длина крюка* диаграммы λ в точке $x=(i, j) \in \lambda$ определяется как $h(x)=h(i, j)=\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1$. Полагая в (1.7') $m=\lambda_1$ и меняя местами λ и λ', мы получим, что

$$\sum_{j=1}^{\lambda_1} t^{\lambda'_j+\lambda_1-j}+\sum_{j=1}^{n} t^{\lambda_1-1+j-\lambda_j}=\sum_{j=0}^{\lambda_1+n-1} t^j,$$

или, полагая $\mu_i = \lambda_i + n - i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что

(1)
$$\sum_{j=1}^{\lambda_1} t^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^{n} t^{\mu_1-\mu_j} = \sum_{j=1}^{\mu_1} t^j.$$

Написав это тождество для разбиения $(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots)$ и просуммировав по $i = 1, 2, \ldots, l(\lambda)$, мы приходим к равенству

(2)
$$\sum_{x\in\lambda} t^{h(x)} + \sum_{i<j} t^{\mu_i-\mu_j} = \sum_{i\geqslant 1}\ \sum_{j=1}^{\mu_i} t^j.$$

Из (2) вытекает, что

(3)
$$\prod_{x\in\lambda}\left(1 - t^{h(x)}\right) = \frac{\prod\limits_{i\geqslant 1}\ \prod\limits_{j=1}^{\mu_i}(1-t^j)}{\prod\limits_{i<j}\left(1-t^{\mu_i-\mu_j}\right)};$$

в частности, деля обе части (3) на $(1-t)^{|\lambda|}$, а затем полагая $t = 1$, мы видим, что

(4)
$$\prod_{x\in\lambda} h(x) = \frac{\prod\limits_{i\geqslant 1}\mu_i!}{\prod\limits_{i<j}(\mu_i-\mu_j)}.$$

2. Сумма длин крюков диаграммы λ есть

$$\sum_{x\in\lambda} h(x) = n(\lambda) + n(\lambda') + |\lambda|.$$

3. Для каждой точки $x = (i, j) \in \lambda$ определим ее *содержание* как $c(x) = j - i$. Тогда

$$\sum_{x\in\lambda} c(x) = n(\lambda') - n(\lambda).$$

Если n — произвольное целое число, большее или равное $l(\lambda)$, то числа $n + c(x)$ для x из i-й строки λ суть $n - i + 1, \ldots, n - i + \lambda_i$ и, значит,

$$\prod_{x\in\lambda}\left(1 - t^{n+c(x)}\right) = \prod_{i\geqslant 1}\frac{\varphi_{\lambda_i+n-i}(t)}{\varphi_{n-i}(t)},$$

где $\varphi_r(t) = (1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^r)$.

4. Если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r \mid \beta_1, \ldots, \beta_r)$ в обозначениях Фробениуса, то

$$\sum_{i=1}^{n} t^i\left(1 - t^{-\lambda_i}\right) = \sum_{j=1}^{r}\left(t^{\beta_j+1} - t^{-\alpha_j}\right).$$

5*. Для всех разбиений λ справедливо равенство

$$\sum_{x\in\lambda}\left(h(x)^2 - c(x)^2\right) = |\lambda|^2.$$

6*. Пусть p — целое число $\geqslant 2$.

(a) Пусть λ, μ — разбиения длины $\leqslant m$, такие, что $\lambda \supset \mu$; предположим, что разность $\lambda - \mu$ является косым p-крюком. Положим $\delta_m = (m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$ и $\xi = \lambda + \delta_m$, $\eta = \mu + \delta_m$. Покажите, что

для некоторой пары индексов $j \leqslant k$ выполняются равенства $\xi_j = \eta_k + p$, $\xi_{j+r} = \eta_{j+r-1}$ $(1 \leqslant r \leqslant k-j)$ и $\xi_i = \eta_i$ при $i < j$ или $i > k$. (Рассмотрите диаграммы разбиений ξ и η.)

(b) В тех же обозначениях предположим, что для каждого r, такого, что $0 \leqslant r \leqslant p-1$, разбиение ξ имеет m_r частей ξ_i, сравнимых с r по модулю p. Запишем эти части ξ_i в виде $p\xi_j^{(r)} + r\left(1 \leqslant j \leqslant m_r\right)$, где $\xi_1^{(r)} > \xi_2^{(r)} > \ldots > \xi_{m_r}^{(r)} \geqslant 0$. Положим $\lambda_j^{(r)} = \xi_j^{(r)} - m_r + j$, так что $\lambda^{(r)}$ является *разбиением*. Набор разбиений $\lambda^* = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p-1)})$ называется *p-частным* разбиения λ. Можно представлять себе λ^* как косую диаграмму, связными компонентами которой являются диаграммы $\lambda^{(r)}$.

Все m чисел $ps + r$, где $0 \leqslant s \leqslant m_r - 1$ и $0 \leqslant r \leqslant p-1$, различны. Расположим их в убывающем порядке, скажем, $\tilde{\xi}_1 > \ldots > \tilde{\xi}_m$, и определим разбиение $\tilde{\lambda}$, полагая $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\xi}_i - m + i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Это разбиение $\tilde{\lambda}$ называется *p-сердцевиной* (или *p-вычетом*) разбиения λ. Как $\tilde{\lambda}$, так и λ^* не зависят от m (при условии, что $m \geqslant l(\lambda)$).

(c) Если $\lambda = \tilde{\lambda}$ (т. е. набор λ^* пуст), то разбиение λ называется *p-сердцевиной*. Например, 2-сердцевины—это в точности разбиения δ_m $(m \geqslant 1)$.

Графически p-сердцевину разбиения λ можно получить так. Удалим из диаграммы разбиения косой p-крюк так, чтобы осталась некоторая диаграмма разбиения, и будем продолжать удалять косые p-крюки таким же образом до тех пор, пока это возможно. То, что останется в результате этого процесса, и есть p-сердцевина $\tilde{\lambda}$ разбиения λ, причем она не зависит от последовательности удаляемых p-крюков. В самом деле, согласно п. (a) выше, удаление из λ косого p-крюка соответствует тому, что из некоторой части разбиения ξ вычитается число p, а затем получающаяся последовательность располагается в убывающем порядке; единственное ограничение состоит в том, что все получающиеся числа должны быть неотрицательны и различны.

(d) Если λ, μ — два разбиения, то мы будем писать $\lambda \underset{p}{\sim} \mu$, когда $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu}$, т. е. когда λ и μ имеют одну и ту же p-сердцевину. Как и выше, положим $\xi = \lambda + \delta_m$, $\eta = \mu + \delta_m$, где $m \geqslant \max(l(\lambda), l(\mu))$. Тогда из (a) и (b) вытекает, что $\lambda \underset{p}{\sim} \mu$ в том и только в том случае, когда $\eta \equiv w\xi \pmod p$ для некоторой перестановки $w \in S_m$.

В силу (c)

$$\lambda \underset{p}{\sim} \mu \Leftrightarrow \lambda' \underset{p}{\sim} \mu'.$$

(e) Из определений в п. (b) вытекает, что разбиение λ однозначно восстанавливается по своим p-сердцевине $\tilde{\lambda}$ и p-частному λ^*. Поскольку $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + p|\lambda^*|$, то производящая функция для множества разбиений, имеющих данную p-сердцевину $\tilde{\lambda}$, имеет вид

$$\sum_{\tilde{\mu}=\tilde{\lambda}} t^{|\mu|} = t^{|\tilde{\lambda}|} P\left(t^p\right)^p,$$

где $P(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-t^n)^{-1}$ есть производящая функция множества всех разбиений. Таким образом, производящая функция для p-сердцевин имеет вид

$$\sum t^{|\tilde{\lambda}|} = P(t)/P\left(t^p\right)^p = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t^{np})^p}{1-t^n}.$$

В частности, при $p=2$ мы получаем тождество

$$(*)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} t^{m(m-1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{2n}}{1-t^{2n-1}}.$$

Мы предоставляем читателю выписать соответствующее тождество при $p>2$: оно оказывается некоторой специализацией «тождества для знаменателя» для аффинной алгебры Ли типа A_{p-1}. В частности, (*) является специализацией тождества Якоби для тройного произведения[1]).

7*. Для каждого разбиения λ обозначим через $h(\lambda)=\prod\limits_{x\in\lambda} h(x)$ произведение его длин крюков (пример 1). В обозначениях примера 6 покажите, что $h(\lambda)=p^{|\lambda^*|}h(\lambda^*)h'(\lambda)$, где $h(\lambda^*)=\prod\limits_{r=0}^{p-1} h(\lambda^{(r)})$, а $h'(\lambda)$ — это произведение тех длин крюков $h(x)$, которые не делятся на p. (Воспользуйтесь формулой (4) из примера 1.)

Если, кроме того, число p просто, то покажите, что

$$h'(\lambda)\equiv\sigma_\lambda h(\tilde{\lambda}) \pmod p,$$

где $\sigma_\lambda=\pm 1$.

В частности, когда p просто, разбиение λ является p-сердцевиной в том и только в том случае, когда $h(\lambda)$ взаимно просто с p.

8*. Пусть λ — некоторое разбиение. Его *многочленом содержаний* называется многочлен $c_\lambda(X)=\prod\limits_{x\in\lambda}(X+c(x))$ (ср. § 3, пример 4), где X — независимое переменное.

(a) Пусть $m\geqslant l(\lambda)$, и пусть, как и в примере 6, $\xi_i=\lambda_i+m-i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. Тогда

$$\frac{c_\lambda(X+m)}{c_\lambda(X+m-1)}=\prod_{i=1}^{m}\frac{X+\xi_i}{X+m-i}.$$

(b) Пусть p — простое число. Если θ есть косой p-крюк, то содержания $c(x)$, $x\in\theta$ — это p последовательных чисел, а значит, они сравнимы по модулю p с числами $0, 1, \ldots, p-1$ в некотором порядке. Поэтому если λ, μ — такие разбиения, что $\lambda\supset\mu$ и $\lambda-\mu$ есть косой p-крюк, то $c_\lambda(X)\equiv c_\mu(X)(X^p-X)\pmod p$. Отсюда следует, что если (как в примере 6) $\tilde{\lambda}$ и λ^* — это p-сердцевина и p-частное разбиения λ соответственно, то

$$c_\lambda(X)\equiv c_{\tilde{\lambda}}(X)(X^p-X)^{|\lambda^*|}\pmod p.$$

(c) Выведите из (a) и (b), что если p — простое число и $|\lambda|=|\mu|$, то $\lambda \underset{p}{\sim} \mu \Leftrightarrow c_\lambda(X)\equiv c_\mu(X) \pmod p$.

9*. Обозначим через $\mathscr{P}_n$ множество разбиений числа n, а через J — множество положительных целых чисел. Для всех $r\geqslant 1$ положим

$$a(r,n)=\operatorname{Card}\{(\lambda,i)\in\mathscr{P}_n\times J:\lambda_i=r\},$$

$$b(r,n)=\operatorname{Card}\{(\lambda,i)\in\mathscr{P}_n\times J: m_i(\lambda)\geqslant r\}.$$

Покажите, что

$$a(r,n)=b(r,n)=p(n-r)+p(n-2r)+\ldots,$$

где $p(m)$ — это число разбиений числа m.

---

[1]) См. [2], тождества (2.2.10) и (2.2.13). — *Прим. перев.*

Выведите отсюда, что

$$\prod_{\lambda \in \mathscr{P}_n} \Big(\prod_{i \geqslant 1} i^{m_i(\lambda)} \Big) = \prod_{\lambda \in \mathscr{P}_n} \Big(\prod_{i \geqslant 1} m_i(\lambda)! \Big).$$

10*. Матрица $M = (m_{ij})$ из неотрицательных вещественных чисел называется *дважды стохастической*, если суммы чисел во всех ее строках и столбцах равны 1.

Пусть λ, μ — два разбиения числа n. Покажите, что $\lambda \geqslant \mu$ тогда и только тогда, когда существует дважды стохастическая $n \times n$-матрица M, такая, что $M\lambda = \mu$ (где λ, μ рассматриваются как векторы-столбцы). [Если $\lambda \geqslant \mu$, то в силу (1.16) можно считать, что $\lambda = R_{ij}\mu$; определим теперь матрицу $M = (m_{rs})$, полагая $m_{ii} = m_{jj} = (\lambda_i - \lambda_j - 1)/(\lambda_i - \lambda_j)$, $m_{ij} = m_{ji} = 1/(\lambda_i - \lambda_j)$ и $m_{rs} = \delta_{rs}$ в остальных случаях. Тогда M дважды стохастическая и $M\lambda = \mu$.]

Замечания и библиографические указания

Идея представления разбиений диаграммами восходит к Ферре и Сильвестру, и некоторые авторы называют диаграмму разбиения диаграммой или графом Ферре (фамилия Ferrers часто пишется ошибочно[1])). Таблицы и повышающие операторы были введены А. Юнгом в серии статей по количественному анализу подстановок [55].

2. Кольцо симметрических функций

Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов с целыми коэффициентами от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Симметрическая группа S_n действует на этом кольце перестановками переменных, и многочлен называется *симметрическим*, если он инвариантен относительно этого действия. Симметрические многочлены образуют подкольцо

$$\Lambda_n = \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}.$$

Кольцо Λ_n градуированное:

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Lambda_n^k,$$

где Λ_n^k состоит из однородных симметрических многочленов степени k (включая нулевой многочлен).

Для каждого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ обозначим через x^α одночлен $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Пусть λ — произвольное разбиение длины $\leqslant n$. Очевидно, многочлен

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum x^\alpha, \tag{2.1}$$

[1]) При переводе на русский язык положение усугубляется. — *Прим. перев.*

где сумма берется по всем различным перестановкам α последовательности $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, является симметрическим, и многочлены m_λ (когда λ пробегает все разбиения длины $\leqslant n$) образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ_n. Значит, многочлены m_λ, такие, что $l(\lambda)\leqslant n$ и $|\lambda|=k$, образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ_n^k; в частности, при $n\geqslant k$ многочлены m_λ с $|\lambda|=k$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ_n^k.

В теории симметрических функций число переменных обычно не имеет значения при условии, что оно достаточно велико, и часто бывает удобнее работать с симметрическими функциями от бесконечного числа переменных. Чтобы придать этой идее точный смысл, рассмотрим при $m\geqslant n$ гомоморфизм

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]\to\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n],$$

переводящий $x_{n+1}, \ldots, x_m$ в 0, а остальные x_i — в себя. При ограничении на Λ_m это дает гомоморфизм

$$\rho_{m,n}\colon \Lambda_m\to\Lambda_n,$$

действие которого на базис (m_λ) легко описать: он переводит $m_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ в $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, если $l(\lambda)\leqslant n$, и в 0, если $l(\lambda)>n$. Отсюда следует, что $\rho_{m,n}$ сюръективен. При ограничении на Λ_m^k получаются гомоморфизмы

$$\rho_{m,n}^k\colon \Lambda_m^k\to\Lambda_n^k$$

(для всех $k\geqslant 0$ и $m\geqslant n$), которые всегда сюръективны и биективны при $m\geqslant n\geqslant k$.

Образуем теперь обратный предел

$$\Lambda^k=\varprojlim_n \Lambda_n^k$$

$\mathbb{Z}$-модулей Λ_n^k относительно гомоморфизмов $\rho_{m,n}^k$: по определению элементы Λ^k — это последовательности $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, где каждый $f_n=f_n(x_1, \ldots, x_n)$ есть однородный симметрический многочлен степени k от $x_1, \ldots, x_n$ и $f_m(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)=f_n(x_1, \ldots, x_n)$ при $m\geqslant n$. Поскольку $\rho_{m,n}^k$ является изоморфизмом при $m\geqslant n\geqslant k$, то проекция $\rho_n^k\colon \Lambda^k\to\Lambda_n^k$, переводящая f в f_n, есть изоморфизм для всех $n\geqslant k$, откуда следует, что Λ^k имеет $\mathbb{Z}$-базис, состоящий из *мономиальных симметрических функций* m_λ (для всех разбиений λ числа k), определяемых формулой $\rho_n^k(m_\lambda)=m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $n\geqslant k$. Поэтому Λ^k есть свободный $\mathbb{Z}$-модуль ранга $p(k)$, где $p(k)$ есть число разбиений числа k.

Положим теперь

$$\Lambda=\bigoplus_{k\geqslant 0}\Lambda^k,$$

так что Λ есть свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный функциями m_λ для *всех* разбиений λ. Для всех $n \geqslant 0$ имеются сюръективные гомоморфизмы

$$\rho_n = \bigoplus_{k \geqslant 0} \rho_n^k \colon \Lambda \to \Lambda_n,$$

причем ρ_n есть изоморфизм в степенях $k \leqslant n$.

Ясно, что Λ обладает структурой градуированного кольца, такой, что все ρ_n являются гомоморфизмами колец. Определенное таким образом градуированное кольцо Λ называется *кольцом симметрических функций*[1]) от счетного числа независимых переменных $x_1, x_2, \ldots$.

Замечания. 1. Кольцо Λ *не* является обратным пределом (в категории колец) колец Λ_n относительно гомоморфизмов $\rho_{m,n}$. Этот обратный предел $\widehat{\Lambda}$ содержит, например, бесконечное произведение $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x_i)$, которое не входит в Λ, поскольку элементы из Λ по определению есть конечные суммы мономиальных симметрических функций m_λ. Однако Λ есть обратный предел колец Λ_n в категории *градуированных* колец.

2. В качестве кольца коэффициентов вместо $\mathbb{Z}$ мы могли бы использовать произвольное коммутативное кольцо A; вместо Λ мы получили бы кольцо $\Lambda_A \cong \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

Элементарные симметрические функции

Для каждого целого $r \geqslant 0$ *r-я элементарная симметрическая функция* e_r определяется как сумма всевозможных произведений r различных переменных x_i, так что $e_0 = 1$ и

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} = m_{(1^r)}$$

при $r \geqslant 1$. Производящая функция для последовательности e_r — это

$$E(t) = \sum_{r \geqslant 0} e_r t^r = \prod_{i \geqslant 1} (1 + x_i t) \tag{2.2}$$

(где t — дополнительное переменное), в чем можно убедиться, раскрыв произведение в правой части. (Если число переменных конечно, скажем равно n, то e_r (точнее, $\rho_n(e_r)$) обращается в 0 для всех $r > n$, и формула (2.2) принимает вид

$$\sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t),$$

[1]) В отличие от Λ_n элементы Λ уже не являются многочленами: это формальные бесконечные суммы одночленов. Поэтому мы возвращаемся к более старой терминологии «симметрических функций».

где обе части являются элементами кольца $\Lambda_n[t]$. Аналогичные замечания применимы ко многим из последующих формул, и мы будем обычно оставлять необходимую (и очевидную) корректировку читателю.)

Для каждого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ положим

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots .$$

(2.3) *Пусть λ — разбиение, а λ' — сопряженное к нему. Тогда*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_\mu a_{\lambda\mu} m_\mu,$$

где $a_{\lambda\mu}$ — целые неотрицательные числа, а суммирование ведется по разбиениям μ, идущим после λ при обратном лексикографическом упорядочении.

Доказательство. Имеем $e_{\lambda'} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \ldots$, где $m_i = m_i(\lambda') = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ в силу (1.4). Раскрывая это произведение, мы получим сумму одночленов; если расположить их в обратном лексикографическом порядке, то старшим членом разложения, очевидно, будет

$$x_1^{m_1} (x_1 x_2)^{m_2} (x_1 x_2 x_3)^{m_3} \ldots = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \ldots = x^\lambda.$$

Поскольку $e_{\lambda'}$ — симметрическая функция, отсюда следует, что мономиальная симметрическая функция m_λ входит в разложение с коэффициентом 1, а остальные входящие в разложение функции m_μ идут после m_λ при обратном лексикографическом упорядочении. ∎

(2.4) *Функции e_r алгебраически независимы над $\mathbb{Z}$ и*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots].$$

Доказательство. Функции m_λ образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ, и (2.3) показывает, что e_λ образуют другой $\mathbb{Z}$-базис: иными словами, каждый элемент кольца Λ однозначно представляется как многочлен от e_r. ∎

Замечание. Когда имеется лишь конечное число переменных $x_1, \ldots, x_n$, то (2.4) утверждает, что $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$ и что $e_1, \ldots, e_n$ алгебраически независимы. Это обычное утверждение «основной теоремы о симметрических функциях».

Полные симметрические функции

Для каждого $r \geqslant 0$ r-я *полная симметрическая функция* h_r определяется как сумма всех одночленов общей степени r от переменных $x_1, x_2, \ldots,$ так что

$$h_r = \sum_{|\lambda| = r} m_\lambda.$$

В частности, $h_0 = 1$ и $h_1 = e_1$. Удобно считать, что h_r и e_r равны 0 при $r < 0$.

Производящая функция для многочленов h_r есть

$$H(t) = \sum_{r \geqslant 0} h_r t^r = \prod_{i \geqslant 1} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{2.5}$$

Это становится понятным, если заметить, что

$$(1 - x_i t)^{-1} = \sum_{k \geqslant 0} x_i^k t^k,$$

и перемножить эти геометрические прогрессии.

Из (2.2) и (2.5) вытекает равенство

$$H(t) E(-t) = 1, \tag{2.6}$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \tag{2.6$'$}$$

для всех $n \geqslant 1$.

Поскольку многочлены e_r алгебраически независимы (2.4), можно определить гомоморфизм градуированных колец

$$\omega: \Lambda \to \Lambda,$$

полагая $\omega(e_r) = h_r$ для всех $r \geqslant 0$. Поскольку соотношения (2.6′) симметричны относительно многочленов e и h, мы видим, что

(2.7) ω *является инволюцией, т. е.* ω^2 — *тождественное отображение.* ∎

Отсюда следует, что ω — автоморфизм кольца Λ; значит, в силу (2.4) получаем

(2.8) *Функции* h_r *алгебраически независимы над* $\mathbf{Z}$ *и*

$$\Lambda = \mathbf{Z}[h_1, h_2, \ldots]. \ ∎$$

Замечание. Если число переменных конечно, скажем равно n (так что $e_r = 0$ при $r > n$), то отображение $\omega: \Lambda_n \to \Lambda_n$ определяется формулой $\omega(e_r) = h_r$ при $1 \leqslant r \leqslant n$ и по-прежнему является инволюцией в силу (2.6′); элементы $h_1, \ldots, h_n$ алгебраически независимы и $\Lambda_n = \mathbf{Z}[h_1, \ldots, h_n]$, но h_{n+1}, $h_{n+2}, \ldots$ являются ненулевыми многочленами от $h_1, \ldots, h_n$ (или от $e_1, \ldots, e_n$).

Как и в случае элементов e, мы положим

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \ldots$$

для всех разбиений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. В силу (2.8) элементы h_λ образуют $\mathbf{Z}$-базис в Λ. У нас есть уже три $\mathbf{Z}$-базиса, зану-

мерованных разбиениями: (m_λ), (e_λ) и (h_λ); два последних переводятся друг в друга инволюцией ω. Если положить

$$f_\lambda = \omega(m_\lambda)$$

для всех разбиений λ, то элементы f_λ образуют четвертый $\mathbb{Z}$-базис в Λ. (Элементы f_λ — это «забытые» симметрические функции: они не имеют простого непосредственного описания.)

Соотношения (2.6′) ведут к детерминантному тождеству, которое понадобится нам в дальнейшем. Пусть N — положительное целое число; рассмотрим матрицы с $N+1$ строками и столбцами

$$H = (h_{i-j})_{0 \leqslant i, j \leqslant N}, \qquad E = ((-1)^{i-j} e_{i-j})_{0 \leqslant i, j \leqslant N},$$

для которых сохраняется упомянутое выше соглашение, что $h_r = e_r = 0$ при $r < 0$. Обе матрицы H и E нижние треугольные с единицами по диагонали, так что $\det H = \det E = 1$; более того, соотношения (2.6′) показывают, что они взаимно обратны. Отсюда следует, что каждый минор матрицы H равен своему алгебраическому дополнению в матрице E', транспонированной к E.

Пусть λ и μ — два разбиения длины $\leqslant p$, такие, что λ' и μ' имеют длину $\leqslant q$, где $p + q = N + 1$. Рассмотрим минор матрицы H с номерами строк $\lambda_i + p - i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ и номерами столбцов $\mu_i + p - i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. В силу (1.7) алгебраическое дополнение к такому минору в E' имеет номера строк $p - 1 + j - \lambda'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ и номера столбцов $p - 1 + j - \mu'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$. Отсюда

$$\det\left(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant p} =$$
$$= (-1)^{|\lambda| + |\mu|} \det\left((-1)^{\lambda'_i - \mu'_j - i + j} e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant q}.$$

Знаки «минус» сокращаются, и мы получаем (см. [1]), что

(2.9) $$\det\left(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant p} = \det\left(e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant q}.$$

В частности, беря $\mu = 0$, мы видим, что

(2.9′) $$\det\left(h_{\lambda_i - i + j}\right) = \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}\right).$$

Степенные суммы

Для каждого $r \geqslant 1$ r-я *степенная сумма* по определению есть

$$p_r = \sum x_i^r = m_{(r)}.$$

Производящая функция для элементов p_r — это

$$P(t)=\sum_{r\geqslant 1} p_r t^{r-1}=\sum_{i\geqslant 1}\sum_{r\geqslant 1} x_i^r t^{r-1}=$$

$$=\sum_{i\geqslant 1}\frac{x_i}{1-x_i t}=\sum_{i\geqslant 1}\frac{d}{dt}\log\frac{1}{1-x_i t},$$

так что

$$(2.10)\quad P(t)=\frac{d}{dt}\log\prod_{i\geqslant 1}(1-x_i t)^{-1}=\frac{d}{dt}\log H(t)=H'(t)/H(t).$$

Аналогично

$$(2.10')\qquad P(-t)=\frac{d}{dt}\log E(t)=E'(t)/E(t).$$

Из (2.10) и (2.10′) мы получаем

$$(2.11)\qquad nh_n=\sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r},$$

$$(2.11')\qquad ne_n=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1} p_r e_{n-r}$$

при $n\geqslant 1$, и эти равенства позволяют выразить элементы h и e через p и обратно. Тождества (2.11′) принадлежат Исааку Ньютону и известны как формулы Ньютона. Из (2.11) ясно, что $h_n\in\mathbf{Q}[p_1, \ldots, p_n]$ и $p_n\in\mathbf{Z}[h_1, \ldots, h_n]$, откуда $\mathbf{Q}[p_1, \ldots, p_n]=\mathbf{Q}[h_1, \ldots, h_n]$. Поскольку элементы h_r алгебраически независимы над $\mathbf{Z}$, а значит, и над $\mathbf{Q}$, отсюда вытекает, что

(2.12) *Функции p_r алгебраически независимы над $\mathbf{Q}$ и*

$$\Lambda_{\mathbf{Q}}=\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}[p_1, p_2, \ldots]. \blacksquare$$

Таким образом, если положить

$$p_\lambda=p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\ldots$$

для всех разбиений $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, то элементы p_λ образуют $\mathbf{Q}$-базис в $\Lambda_{\mathbf{Q}}$. Но они *не* образуют $\mathbf{Z}$-базис в Λ: например, в выражении элемента $h_2=(p_1^2+p_2)/2$ через p_λ коэффициенты не являются целыми.

Поскольку инволюция ω меняет местами $E(t)$ и $H(t)$, из (2.10) и (2.10′) вытекает, что $\omega(p_n)=(-1)^{n-1}p_n$ для всех $n\geqslant 1$, откуда для всех разбиений λ получаем

$$(2.13)\qquad \omega(p_\lambda)=\varepsilon_\lambda p_\lambda,$$

где $\varepsilon_\lambda=(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}$.

Наконец, выразим элементы h_n и e_n как линейные комбинации p_λ. Для каждого разбиения λ положим

$$z_\lambda = \prod_{i \geqslant 1} i^{m_i} \cdot m_i!,$$

где $m_i = m_i(\lambda)$ есть число частей λ, равных i. Тогда

(2.14) $$H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}, \qquad E(t) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|},$$

или, что эквивалентно,

(2.14′) $$h_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p_\lambda, \qquad e_n = \sum_{|\lambda|=n} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda.$$

Доказательство. Достаточно доказать первое из тождеств (2.14), поскольку второе получается из него применением инволюции ω с помощью (2.13). В силу (2.10)

$$H(t) = \exp \sum_{r \geqslant 1} p_r t^r / r = \prod_{r \geqslant 1} \exp(p_r t^r / r) =$$

$$= \prod_{r \geqslant 1} \sum_{m_r=0}^{\infty} (p_r t^r)^{m_r} / r^{m_r} \cdot m_r! = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}. \blacksquare$$

(2.15) *Замечание.* На языке λ-колец ([5], [23]) кольцо Λ есть «свободное λ-кольцо от одной переменной» (точнее, соответствующее кольцо, рассматриваемое без дополнительных структур[1])). Следовательно, *все* формулы и тождества этой главы могут быть переведены на этот язык. В наши намерения не входит излагать теорию λ-колец — приведем просто небольшой словарик.

Если R — произвольное λ-кольцо и x — произвольный элемент из R, то существует единственный λ-гомоморфизм $\Lambda \to R$, переводящий $e_1 (= h_1 = p_1)$ в x. Этот гомоморфизм переводит

e_r	в	$\lambda^r(x)$	(r-я внешняя степень),
h_r	в	$\sigma^r(x) = (-1)^r \lambda^r(-x)$	(r-я симметрическая степень),
$E(t)$	в	$\lambda_t(x)$,	
$H(t)$	в	$\sigma_t(x) = \lambda_{-t}(-x)$,	
p_r	в	$\psi^r(x)$	(операции Адамса),

а инволюция ω соответствует отображению $x \longmapsto -x$ в R. Так, например, тождество (2.14′) принимает вид

$$\sigma^n(x) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} \psi^\lambda(x)$$

[1]) В оригинале — underlying ring, по-видимому, общепринятый и не нуждающийся в разъяснениях перевод на русский язык все еще отсутствует. — *Прим. перев.*

для любого элемента x произвольного λ-кольца (где, разумеется, $\psi^{\lambda}(x) = \psi^{\lambda_1}(x)\psi^{\lambda_2}(x)\ldots$).

Примеры

1. Пусть $x_1 = \ldots = x_n = 1$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$. Тогда $E(t) = (1+t)^n$, $H(t) = (1-t)^{-n}$, так что

$$e_r = \binom{n}{r}, \quad h_r = \binom{n+r-1}{r}$$

и $p_r = n$ для всех $r \geqslant 1$.

2. Положим $x_i = 1/n$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i = 0$ при $i > n$, и пусть $n \to \infty$. В силу примера 1 мы получим

$$e_r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r}\binom{n}{r} = \frac{1}{r!}$$

и аналогично $h_r = 1/r!$, так что $E(t) = H(t) = e^t$. При этом $p_1 = 1$ и $p_r = 0$ для $r > 1$; более общим образом, $m_\lambda = 0$ для всех разбиений λ, кроме $\lambda = (1^r)$ $(r \geqslant 0)$.

3. Пусть $x_i = a^{i-1}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $x^i = 0$ при $i > n$, где q — независимое переменное. Тогда

$$E(t) = \prod_{i=0}^{n-1}(1+q^i t) = \sum_{r=0}^{n} q^{r(r-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} t^r,$$

где $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ — это «q — биномиальный коэффициент» или многочлен Гаусса

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-r+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)},$$

а

$$H(t) = \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i t)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+r-1 \\ r \end{bmatrix} t^r.$$

Эти тождества легко доказываются индукцией по n. Мы получаем, что

$$e_r = q^{r(r-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}, \qquad h_r = \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r \end{bmatrix}.$$

Функция h_r есть производящая функция для разбиений λ, таких, что $l(\lambda) \leqslant r$ и $l(\lambda') \leqslant n-1$, а e_r — производящая функция для таких же разбиений, у которых к тому же все части различны.

4. В примере 3 пусть $n \to \infty$, т. е. положим $x_i = q^{i-1}$ для всех $i \geqslant 1$. Тогда

$$E(t) = \prod_{i=0}^{\infty}(1+q^i t) = \sum_{r=0}^{\infty} q^{r(r-1)/2} t^r/\varphi_r(q),$$

$$H(t) = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i t)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} t^r/\varphi_r(q),$$

где $\varphi_r(q) = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)$. Значит, в этом случае

$$e_r = q^{r(r-1)/2}/\varphi_r(q), \qquad h_r = 1/\varphi_r(q)$$

и $p_r = (1-q^r)^{-1}$.

5. Поскольку элементы h_r алгебраически независимы, мы можем специализировать их произвольным образом и забыть об исходных переменных x_i: другими словами, в качестве $H(t)$ (или $E(t)$) можно взять произвольный степенной ряд со свободным членом 1. (Мы это уже сделали выше в примере 2, где $H(t) = e^t$.) Пусть a, b, q — независимые переменные; возьмем

$$H(t) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1 - bq^i t}{1 - aq^i t}.$$

Тогда

$$h_r = \prod_{i=1}^{r} \frac{a - bq^{i-1}}{1 - q^i}, \qquad e_r = \prod_{i=1}^{r} \frac{aq^{i-1} - b}{1 - q^i}$$

(см., например, [2], гл. II). Кроме того, $p_r = (a^r - b^r)/(1 - q^r)$.

6. Возьмем $H(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-1}$, так что $h_n = p(n)$ — число разбиений числа n. Тогда $E(-t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)$ и, значит, по теореме Эйлера о пятиугольных числах, $e_n = 0$, если n не является пятиугольным числом, т. е. числом вида $m(3m+1)/2$ для некоторого $m \in Z$, и $e_n = (-1)^{m(m+1)/2}$ при $n = m(3m+1)/2$.

Из (2.10) вытекает, что $p_r = \sigma(r)$ есть сумма всех делителей числа r. Значит, в этом случае (2.11) дает

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \sigma(r)\, p(n-r). \tag{1}$$

7. Возьмем $H(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-n}$, так что $h_n = p_2(n)$ — число плоских разбиений числа n (см. ниже § 5, пример 13). Из (2.10) вытекает, что $p_r = \sigma_2(r)$ есть сумма квадратов делителей числа r. Значит, в силу (2.11)

$$p_2(n) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \sigma_2(r)\, p_2(n-r). \tag{2}$$

Пожалуй, стоит предостеречь читателя, что очевидное обобщение (1) и (2) на случай m-мерных разбиений при $m > 2$ ошибочно.

8. Решая уравнения (2.6′) относительно e_n, мы получим

$$e_n = \det\left(h_{1-i+j}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n};$$

двойственным образом,

$$h_n = \det\left(e_{1-i+j}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \text{ [1]}.$$

Аналогично из (2.11) мы получаем следующие формулы:

$$p_n = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ ne_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \dots & e_1 \end{vmatrix},$$

[1]) Эти формулы являются частным случаем (2.9′). — *Прим. перев.*

$$n!e_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \cdot & \dots & n-1 \\ p_n & p_{n-1} & \cdot & \dots & p_1 \end{vmatrix}$$

и, двойственным образом,

$$(-1)^{n-1}p_n = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2h_2 & h_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ nh_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \dots & h_1 \end{vmatrix},$$

$$n!h_n = \begin{vmatrix} p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & -2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \cdot & \dots & -n+1 \\ p_n & p_{n-1} & \cdot & \dots & p_1 \end{vmatrix}.$$

9. Пусть G — произвольная подгруппа симметрической группы S_n. *Цикловым индикатором* подгруппы G называется симметрическая функция

$$c(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} n_G(\rho)\, p_\rho,$$

где $n_G(\rho)$ — число элементов в G циклового типа ρ [1]), и сумма берется по всем разбиениям ρ числа n. В частности,

$$c(S_n) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho = h_n$$

в силу (2.14′), а для знакопеременной группы A_n имеем

$$c(A_n) = h_n + e_n.$$

Если G — подгруппа в S_n, а H — подгруппа в S_m, то $G \times H$ — подгруппа в $S_n \times S_m \subset S_{n+m}$ и $c(G \times H) = c(G) \cdot c(H)$.

10. Из примеров 8 и 9 следует, что число элементов циклового типа ρ в S_n равно коэффициенту при p_ρ в определителе

$$d_n = n!h_n = \begin{vmatrix} p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & -2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \cdot & \dots & -n+1 \\ p_n & p_{n-1} & \cdot & \dots & p_1 \end{vmatrix}.$$

[1]) См. § 7 ниже. — *Прим. перев.*

Пусть l — простое число. Приводя определитель d_n по модулю l, мы можем использовать эту формулу для подсчета числа классов сопряженности в S_n, порядок которых взаимно прост с l. Предположим, что $n = a_0 + n_1 l$, где $0 \leqslant a_0 \leqslant l-1$. Тогда, поскольку числа, кратные l, стоящие над диагональю в определителе d_n, при приведении по модулю l превращаются в 0, то

$$d_n \equiv d_l^{n_1} d_{a_0} \pmod l.$$

Далее, из первоначального определения $d_n = n! c(S_n)$ ясно, что

$$d_l \equiv p_1^l - p_l \pmod l$$

и, значит,

$$d_n \equiv \left(p_1^l - p_l\right)^{n_1} d_{a_0} \pmod l. \tag{1}$$

Из (1) следует, что если $n = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + \ldots$ с $0 \leqslant a_i \leqslant l-1$ для всех $i \geqslant 0$, то

$$d_n \equiv d_{a_0} \prod_{i \geqslant 1} \left(p_1^{l^i} - p_l^{l^{i-1}}\right)^{a_i} \pmod l.$$

Следовательно, если обозначить через $\mu_l(S_n)$ число классов сопряженности в S_n порядка, взаимно простого с l, то

$$\mu_l(S_n) = \mu_l(S_{a_0}) \prod_{i \geqslant 1} (a_i + 1) = p(a_0) \prod_{i \geqslant 1} (a_i + 1),$$

где $p(a_0)$ — число разбиений числа a_0. В частности, если $l = 2$, то мы видим, что $\mu_2(S_n)$ всегда есть степень двойки, так как каждое a_i есть либо 0, либо 1: а именно, $\mu_2(S_n) = 2^r$, если $[n/2]$ есть сумма r различных степеней двойки [1]).

11. Пусть

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n t^n}{n!}, \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n t^n}{n!}$$

— формальные степенные ряды (с коэффициентами из коммутативной $\mathbf{Q}$-алгебры), такие, что $g(0) = 0$. Подставив $g(t)$ вместо t в ряд $f(t)$, мы получим ряд

$$H(t) = f(g(t)) = \sum_{0}^{\infty} \frac{H_n t^n}{n!}.$$

Ясно, что коэффициенты H_n имеют вид

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} f_k B_{n,k}(g),$$

где $B_{n,k}$ являются многочленами от коэффициентов ряда g; они называются *частичными многочленами Белла*. Поскольку H_n линейно зависит от коэффициентов ряда f, для вычисления многочленов $B_{n,k}$ можно взять $f_k = a^k$, так что $f(t) = e^{at}$. Записывая, как обычно,

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n,$$

---

[1]) Набросок более прямого и простого доказательства формулы для $\mu_l(S_n)$ дан Стенли в [19°]. — *Прим. перев.*

мы имеем $H(t) = \exp(ag(t))$; значит, в силу (2.10)

$$P(t) = \frac{d}{dt}\log H(t) = ag'(t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{ag_n t^{n-1}}{(n-1)!},$$

так что $p_n = ag_n/(n-1)!$ при всех $n \geqslant 1$. Отсюда в силу (2.14′)

$$H_n = n!h_n = \sum_{|\lambda|=n} \frac{n!}{z_\lambda} p_\lambda$$

и, следовательно,

$$B_{n,k} = \sum_{\lambda} \frac{n!}{z_\lambda} p_\lambda = \sum_{\lambda} c_\lambda g_\lambda,$$

где суммирование ведется по разбиениям λ числа n, таким, что $l(\lambda) = k$, и

$$g_\lambda = g_{\lambda_1} g_{\lambda_2} \ldots, \qquad c_\lambda = n! \Big/ \prod_{i \geqslant 1} r_i!\,(i!)^{r_i},$$

если $\lambda = (1^{r_1} 2^{r_2} \ldots)$. Эти коэффициенты c_λ — *целые* числа, так как c_λ — это число разложений множества из n элементов на непересекающиеся подмножества, состоящие из $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ элементов. Таким образом, $B_{n,k}$ являются целочисленными многочленами от коэффициентов g_n.

Частные случаи:

(a) Если $g(t) = \log(1+t)$, то $B_{n,k} = s(n, k)$ — числа Стирлинга *первого рода*; $(-1)^{n-k}s(n, k)$ есть число элементов группы S_n, являющихся произведением k непересекающихся циклов. Имеем

$$\sum_{n,\ k \geqslant 0} s(n, k) \frac{t^n}{n!} a^k = (1+t)^a = \sum_{n \geqslant 0} \binom{a}{n} t^n,$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, a^k = a(a-1)\ldots(a-n+1),$$

а значит, что $s(n, k)$ есть $(n-k)$-я элементарная симметрическая функция от $-1, -2, \ldots, -n+1$.

(b) Если $g(t) = e^t - 1$, так что $g_n = 1$ для всех $n \geqslant 1$, то $B_{n,k} = S(n, k)$ — *числа Стирлинга второго рода*; $S(n, k)$ есть число разложений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств и, кроме того, — это $(n-k)$-я полная симметрическая функция от $1, 2, \ldots, k$.

12. Выведите из примера 11, что если f и g являются n-кратно дифференцируемыми функциями действительного переменного и через f_k, g_k и $(f \circ g)_k$ обозначены k-е производные функций f, g и $f \circ g$, то

$$(f \circ g)_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots)(f_k \circ g).$$

13. Если $H(t) = (1-t^r)/(1-t)^r$, то

$$h_n = \binom{n+r-1}{r-1} - \binom{n-1}{r-1},$$

и с помощью (2.10) мы находим, что $p_n = r$, если $n \not\equiv 0 \pmod r$, и $p_n = 0$ при $n \equiv 0 \pmod r$. Значит, в силу (2.14′)

$$\sum_\lambda z_\lambda^{-1} r^{l(\lambda)} = \binom{n+r-1}{r-1} - \binom{n-1}{r-1} \quad (r \geqslant 2),$$

где сумма слева берется по разбиениям λ числа n, ни одна часть которых не кратна r.

В частности ($r = 2$),

$$\sum_\lambda z_\lambda^{-1} 2^{l(\lambda)} = 2,$$

где сумма берется по разбиениям числа n на *нечетные* части.

14*. Предположим, что $p_n = an^n/n!$ при $n \geqslant 1$. Тогда

$$h_n = \frac{a(a+n)^{n-1}}{n!}, \quad e_n = \frac{a(a-n)^{n-1}}{n!}$$

для всех $n \geqslant 0$. [Пусть $t = xe^{-x}$; с помощью формулы обращения Лагранжа покажите, что $P(t) = ae^x/(1-x)$.]

15*. Покажите, что

$$\sum_\rho z_\rho^{-1} = \sum_\sigma z_\sigma^{-1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n},$$

где первая сумма берется по всем разбиениям ρ числа $2n$ на четные части, а вторая — по разбиениям σ числа $2n$ на нечетные части.

16*. Если $h_n = n$ при всех $n \geqslant 1$, то покажите, что последовательность $(p_n)_{n \geqslant 1}$ периодична с периодом 6, а последовательность $(e_n)_{n \geqslant 1}$ периодична с периодом 3.

17* (Неравенства Мюрхеда). Для каждого разбиения λ числа n определим *λ-среднее* семейства $x = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$M_\lambda(x) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} w(x^\lambda).$$

В частности, $M_{(n)}(x)$ — это среднее арифметическое, а $M_{(1^n)}(x)$ — среднее геометрическое чисел $x_1^n, \ldots, x_n^n$.

Пусть λ, μ — разбиения числа n. Тогда следующие два утверждения эквивалентны: (i) $\lambda \geqslant \mu$; (ii) $M_\lambda(x) \geqslant M_\mu(x)$ для всех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}_+$. [При доказательстве импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) можно в силу (1.16) считать, что $\lambda = R_{ij}\mu$, а в этом случае для доказательства неравенства (ii) достаточно показать, что

$$x_i^{\lambda_i} x_j^{\lambda_j} + x_j^{\lambda_i} x_i^{\lambda_j} \geqslant x_i^{\mu_i} x_j^{\mu_j} + x_j^{\mu_i} x_i^{\mu_j}.$$

Для доказательства (ii) $\Rightarrow$ (i) положите $x_1 = \ldots = x_r = X$, $x_{r+1} = \ldots = x_n = 1$, где X — большое число, и выведите из (ii), что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \geqslant \mu_1 + \ldots + \mu_r$.]

Замечания и библиографические указания

Пример 10. Вычисление $\mu_p(S_n)$ и, в частности, тот факт, что $\mu_2(S_n)$ есть степень двойки, являются, насколько мне известно, новыми. Более общим образом, если G — произволь-

ная конечная группа Коксетера, то $\mu_2(G)$ есть степень двойки [33].

Пример 11. Дальнейшую информацию о многочленах Белла, числах Стирлинга и т. д. см., например, в L. Comtet, Analyse Combinatoire (2 vols.), Presses Universitaires de France, Paris (1970).

Пример 13. Этот результат принадлежит Моррису [38].

3. S-функции

Предположим сначала, что число переменных конечно, скажем $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ — одночлен; рассмотрим многочлен a_α, получаемый из x^α антисимметризацией: по определению

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \cdot w(x^\alpha),$$

где $\varepsilon(w)$ есть *знак* (± 1) перестановки w. Многочлен a_α кососимметричен, т. е. $w(a_\alpha) = \varepsilon(w) a_\alpha$ для всех $w \in S_n$; в частности, a_α обращается в 0, если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не все различны. Значит, можно к тому же считать, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \ldots > \alpha_n \geqslant 0$, и, следовательно, записать $\alpha = \lambda + \delta$, где λ — разбиение длины $\leqslant n$, а $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Тогда

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_w \varepsilon(w) \cdot w(x^{\lambda+\delta}),$$

что может быть записано в виде определителя:

$$a_{\lambda+\delta} = \det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}.$$

Этот определитель делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ на каждую из разностей $x_i - x_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, а значит, на их произведение, которое есть *определитель Вандермонда*

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j) = \det\left(x_i^{n-j}\right) = a_\delta.$$

Таким образом, $a_{\lambda+\delta}$ делится на a_δ в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, и частное

$$s_\lambda = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \tag{3.1}$$

является *симметрическим* многочленом, т. е. лежит в Λ_n. Он называется *S-функцией* от переменных $x_1, \ldots, x_n$, соответствующей разбиению λ (где $l(\lambda) \leqslant n$), и однороден степени $|\lambda|$.

Отметим, что определение (3.1) имеет смысл для произвольного целочисленного вектора $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, такого, что $\lambda + \delta$ не имеет отрицательных членов. Если числа $\lambda_i + n - i$ $(1 \leqslant$

$\leqslant i \leqslant n$) не все различны, то $s_\lambda = 0$. Если же они все различны, то $\lambda + \delta = w(\mu + \delta)$ для некоторого $w \in S_n$ и некоторого разбиения μ, и тогда $s_\lambda = \varepsilon(w) s_\mu$.

Когда λ пробегает все разбиения длины $\leqslant n$, многочлены $a_{\lambda+\delta}$ образуют базис в $\mathbb{Z}$-модуле A_n кососимметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$. Умножение на a_δ есть изоморфизм между Λ_n и A_n (т. е. A_n — свободный Λ_n-модуль, порожденный a_δ), следовательно,

(3.2) *S-функции $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ с $l(\lambda) \leqslant n$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ_n.* ∎

Посмотрим теперь, что происходит при возрастании числа переменных. Если $m \geqslant n$, то ясно, что $a_\alpha(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$. Значит, в обозначениях § 2

$$\rho_{m, n}(s_\lambda(x_1, \ldots, x_m)) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Отсюда следует, что для каждого разбиения λ многочлены $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ при $n \to \infty$ однозначно определяют элемент $s_\lambda \in \Lambda$, однородный степени $|\lambda|$. Из (3.2) сразу получаем

(3.3) *Функции s_λ образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ; для всех $k \geqslant 0$ функции s_λ, такие, что $|\lambda| = k$, образуют $\mathbb{Z}$-базис в Λ^k.* ∎

Из (2.4) и (2.8) следует, что каждая S-функция s_λ может быть выражена как многочлен от элементарных симметрических функций e_r и как многочлен от полных симметрических функций h_r. Вот соответствующие формулы:

(3.4) $$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}, \quad \text{где} \quad n \geqslant l(\lambda),$$

(3.5) $$s_\lambda = \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant m}, \quad \text{где} \quad m \geqslant l(\lambda').$$

В силу (2.9′) достаточно доказать одну из этих формул, скажем (3.4). Будем работать с n переменными $x_1, \ldots, x_n$. При $1 \leqslant k \leqslant n$ обозначим через $e_r^{(k)}$ элементарные симметрические функции от $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ (x_k опускается) и через M $n \times n$-матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i, k \leqslant n}.$$

Формула (3.4) будет выведена из

(3.6) *Для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ положим*

$$A_\alpha = \left(x_j^{\alpha_i}\right), \qquad H_\alpha = \left(h_{\alpha_i - n + j}\right)$$

($n \times n$-матрицы). Тогда $A_\alpha = H_\alpha M$.

Доказательство. Пусть

$$E^{(k)}(t)=\sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)}t^r=\prod_{i\neq k}(1+x_it).$$

Тогда

$$H(t)\,E^{(k)}(-t)=(1-x_kt)^{-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^{α_i} в обеих частях, мы получим

$$\sum_{j=1}^{n} h_{\alpha_i-n+j}\cdot(-1)^{n-j}e_{n-j}^{(k)}=x_k^{\alpha_i},$$

откуда $H_\alpha M=A_\alpha$. ∎

Возьмем теперь в (3.6) определители. Мы получим

$$a_\alpha=\det(A_\alpha)=\det(H_\alpha)\det(M)$$

для всех $\alpha\in\mathbb{N}^n$; в частности, $\det(M)=a_\delta$, так как $\det(H_\delta)=1$. Значит,

$$a_\alpha=a_\delta\det(H_\alpha) \tag{3.7}$$

или, что эквивалентно,

$$a_\alpha=a_\delta\sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\,h_{\alpha-w\delta} \tag{3.7$'$}$$

для всех $\alpha\in\mathbb{N}^n$. Беря в (3.7) $\alpha=\lambda+\delta$, мы приходим к (3.4), или, эквивалентным образом, из (3.7′) получаем

$$s_\lambda=\sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\,h_{\lambda+\delta-w\delta}. \tag{3.4$'$}$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает, что

$$\omega(s_\lambda)=s_{\lambda'} \tag{3.8}$$

для всех разбиений λ.

Кроме того, из (3.4) и (3.5) следует, в частности,

$$s_{(n)}=h_n,\qquad s_{(1^n)}=e_n. \tag{3.9}$$

Наконец, формулу (3.4) или (3.4′), выражающую s_λ как многочлен от элементов h, можно также выразить в терминах повышающих операторов (§ 1):

$$s_\lambda=\prod_{i<j}(1-R_{ij})\,h_\lambda, \tag{3.4$''$}$$

где для каждого повышающего оператора R выражение Rh_λ означает $h_{R\lambda}$.

Доказательство. В кольце $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$

$$\sum_{w \in S_n} \varepsilon(w)\, x^{\lambda+\delta-w\delta} = x^{\lambda+\delta} a_{-\delta} = x^{\lambda+\delta} \prod_{i<j} (x_i^{-1} - x_j^{-1}) =$$

$$= \prod_{i<j} (1 - x_j x_i^{-1}) \cdot x^\lambda = \prod_{i<j} (1 - R_{ij})\, x^\lambda,$$

где $R(x^\lambda) = x^{R\lambda}$ для всех повышающих операторов R. Если применить теперь $\mathbb{Z}$-линейное отображение φ: $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] \to \Lambda_n$, определяемое посредством $\varphi(x^\alpha) = h_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, то мы видим, что

$$\sum_{w \in S_n} \varepsilon(w)\, h_{\lambda+\delta-w\delta} = \prod_{i<j} (1 - R_{ij})\, h_\lambda,$$

и, значит, (3.4″) вытекает из (3.4′). ∎

(3.10) *Замечание.* Ввиду (2.15) мы можем использовать (3.4) или (3.5) для определения «S-операций» в произвольном λ-кольце R. Если μ — произвольное разбиение, а x — любой элемент в R, мы полагаем

$$S^\mu(x) = \det\left(\sigma^{\mu_i - i + j}(x)\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} = \det\left(\lambda^{\mu'_i - i + j}(x)\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant m},$$

где $n \geqslant l(\mu)$ и $m \geqslant l(\mu')$. В частности,

$$S^{(n)}(x) = \sigma^n(x), \qquad S^{(1^n)}(x) = \lambda^n(x) \quad \text{и}$$

$$S^\mu(-x) = (-1)^{|\mu|} S^{\mu'}(x).$$

Результаты примеров 1—3 ниже позволяют вычислить $S^\lambda(1 + q + \ldots + q^{n-1})$, $S^\lambda((1-q)^{-1})$ и $S^\lambda((a-b)/(1-q))$, где a, b, q — элементы ранга 1 в λ-кольце R, такие, что $1-q$ обратим в R.

Так как каждая функция $f \in \Lambda$ есть целочисленная линейная комбинация функций s_μ, скажем

$$f = \sum a_\mu s_\mu,$$

отсюда следует, что f определяет «естественную операцию»

$$F = \sum a_\mu S^\mu$$

на категории λ-колец. Она *естественна* в том смысле, что коммутирует со всеми λ-гомоморфизмами (поскольку F есть многочлен от операций λ^r). Обратно, любая естественная операция F получается таким образом из $f = F(e_1)$.

Примеры

1. Как и в примере 3 § 2, возьмем $x_i = q^{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Если λ — произвольное разбиение длины $\leqslant n$, то

$$a_{\lambda+\delta} = \det\left(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n};$$

это определитель Вандермонда от переменных q^{λ_j+n-j} $(1 \leqslant j \leqslant n)$, так что

$$a_{\lambda+\delta} = \prod_{i<j} \left(q^{\lambda_j+n-j} - q^{\lambda_i+n-i}\right) = q^{n(\lambda)+\binom{n}{3}} \prod_{i<j} \left(1 - q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j}\right),$$

а это в силу примера 1 § 1 равняется

$$q^{n(\lambda)+\binom{n}{3}} \frac{\prod\limits_{i \geqslant 1} \varphi_{\lambda_i+n-i}(q)}{\prod\limits_{x \in \lambda} \left(1 - q^{h(x)}\right)},$$

где $h(x)$ — длина крюка диаграммы λ в точке $x \in \lambda$, а $\varphi_r(q) = (1 - q) \ldots (1 - q^r)$. Отсюда (§ 1, пример 3)

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta = q^{n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - q^{n+c(x)}}{1 - q^{h(x)}},$$

где $c(x)$ есть содержание (§ 1, пример 3) точки $x \in \lambda$.

Для каждого разбиения λ положим

$$\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - q^{n-c(x)}}{1 - q^{h(x)}}$$

(когда $\lambda = (r)$, это согласуется с обозначением $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ для q-биномиальных коэффициентов, введенным в примере 3 § 2). Тогда

$$s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda' \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$ есть многочлен от q степени

$$d = \sum_{x \in \lambda} (n - c(x) - h(x)) = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - 2i) \lambda_i'$$

в силу примеров 2 и 3 § 1. Если a_i — коэффициент при q^i в многочлене $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$ при $0 \leqslant i \leqslant d$, то очевидно, что $a_i = a_{d-i}$. В примере 4 § 8 мы покажем, что многочлен $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$ *унимодален* (или имеет «форму веретена»), т. е. что $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{[d/2]}$.

Наконец, с помощью (3.5) мы можем выразить $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}$ как определитель из q-биномиальных коэффициентов $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$.

2. В примере 1 пусть $n \to \infty$, так что $H(t) = \prod\limits_{i=0}^{\infty} (1 - q^i t)^{-1}$. В силу примера 1

$$s_\lambda = q^{n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \left(1 - q^{h(x)}\right)^{-1} = q^{n(\lambda)} H_\lambda(q)^{-1},$$

где $H_\lambda(q)$ — «многочлен крюков» $\prod\limits_{x \in \lambda} \left(1 - q^{h(x)}\right)$.

3. Более общим образом, пусть, как и в примере 5 § 2,

$$H(t)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1-bq^it}{1-aq^it}.$$

Тогда

$$(*)\qquad s_\lambda=q^{n(\lambda)}\prod_{x\in\lambda}\frac{a-bq^{c(x)}}{1-q^{h(x)}}.$$

В самом деле, при замене t на $a^{-1}t$ функция s_λ заменяется на $a^{-|\lambda|}s_\lambda$. Значит, можно считать, что $a=1$. Тогда обе части (*) являются многочленами от b, и, следовательно, достаточно доказать, что они совпадают для бесконечного числа значений b. Но при $b=q^n$ и $a=1$ мы возвращаемся к ситуации примера 1, и, таким образом, при $b=q^n$ утверждение (*) справедливо.

4. Предположим, что $x_i=1$ при $1\leqslant i\leqslant n$ и $x_i=0$ при $i>n$. Тогда $E(t)=(1+t)^n$, и, полагая в примере 1 $q=1$, мы видим, что

$$s_\lambda=\prod_{x\in\lambda}\frac{n+c(x)}{h(x)}.$$

Более общим образом, если $E(t)=(1+t)^X$, где X не обязано быть положительным целым числом, то

$$s_\lambda=\prod_{x\in\lambda}\frac{X+c(x)}{h(x)}$$

по той же причине, что и в примере 3: обе части являются многочленами от X, принимающими одинаковые значения во всех положительных целых числах.

Эти многочлены можно рассматривать как обобщенные биномиальные коэффициенты, и они принимают целые значения при целых X. Для всех разбиений λ положим

$$\binom{X}{\lambda}=\prod_{x\in\lambda}\frac{X-c(x)}{h(x)}$$

(это согласуется с обычным обозначением для биномиальных коэффициентов). Тогда в силу (3.5)

$$\binom{X}{\lambda}=\det\left(\binom{X}{\lambda_i-i+j}\right).$$

Кроме того,

$$\binom{-X}{\lambda}=(-1)^{|\lambda|}\binom{X}{\lambda'}.$$

5. Как и в примере 2 § 2, возьмем $x_i=1/n$ при $1\leqslant i\leqslant n$ и $x_i=0$ при $i>n$, и пусть $n\to\infty$. Тогда $E(t)=H(t)=e^t$, и из примера 4 мы получаем

$$s_\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{|\lambda|}}\prod_{x\in\lambda}\frac{n+c(x)}{h(x)}=\prod_{x\in\lambda}h(x)^{-1}.$$

6. Обозначим через $p(n)$ число разбиений числа n. Тогда

$$\det(p(i-j+1))_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}$$

равен ±1 или 0 в зависимости от того, является или нет число n пятиугольным (используйте пример 6 § 2 в сочетании с (3.4)).

7. Пусть m — положительное целое число. Тогда

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_i^m-x_j^m}{x_i-x_j}=\frac{a_{m\delta}}{a_\delta}=s_{(m-1)\delta}=$$

$$=\det\left(h_{(m-1)(n-i)-i+j}\right)_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}=\det\left(h_{mi-j}\right)_{1\leqslant i,\ j\leqslant n-1}$$

В частности,

$$\prod_{i<j}(x_i+x_j)=\det\left(h_{2i-j}\right)\ ^{1)}.$$

8. Рассмотрим кольцо $Q_n=\mathbb{Q}\left[x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1}\right]$ многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_n$ и обратных к ним. Для всех $\alpha\in Z^n$ одночлен $x^\alpha=x^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ порождает симметрическую функцию

$$\tilde{m}_\alpha=\sum_{w\in S_n}x^{w\alpha},$$

и функции $\tilde{m}_\alpha$, такие, что $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$, образуют базис в $Q_n^{S_n}$.

Определим линейное отображение φ: $Q_n^{S_n}\to\Lambda_n\otimes\mathbb{Q}$, полагая $\varphi(\tilde{m}_\alpha)=h_\alpha$ (с обычным соглашением, что $h_\alpha=0$, если какое-нибудь α_i отрицательно).

(a) Для всех $\alpha,\beta\in Z^n$

$$\varphi\left(a_\alpha a_\beta\right)=\det\left(h_{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}.$$

В самом деле,

$$a_\alpha a_\beta=\sum_{w_1,\ w_2\in S_n}\varepsilon(w_1w_2)\,x^{w_1\alpha+w_2\beta}=$$

$$=\sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\sum_{w_1\in S_n}x^{w_1(\alpha+w\beta)}=\sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\,\tilde{m}_{\alpha+w\beta},$$

так что

$$\varphi\left(a_\alpha a_\beta\right)=\sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\,h_{\alpha+w\beta}=\det\left(h_{\alpha_i+\beta_j}\right).$$

(b) В частности, если λ — произвольное разбиение длины $\leqslant n$, то

$$\varphi\left(s_\lambda a_\delta a_{-\delta}\right)=\varphi\left(a_{\lambda+\delta}a_{-\delta}\right)=\det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)=s_\lambda$$

в силу (3.4). Поскольку функции s_λ образуют Z-базис в Λ_n, отсюда следует, что $\varphi\left(fa_\delta a_{-\delta}\right)=f$ для всех $f\in\Lambda_n$.

(c) Пусть $\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}^n$, и пусть $\bar{\beta}=(\beta_n,\ \ldots,\ \beta_1)$ — вектор β, прочитанный в обратном порядке. Тогда $s_{\bar\beta}=a_{\beta-\delta}/a_{-\delta}$, а значит, в силу (a) и (b)

$$s_\alpha s_{\bar\beta}=\varphi\left(a_{\alpha+\delta}a_{\beta-\delta}\right)=\det\left(h_{\alpha_i+\beta_j-i+j}\right)_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}$$

— эта формула выражает произведение двух S-функций (от конечного числа переменных) в виде определителя от функций h_r.

---

[1]) Как указал Стенли в [19°], комбинаторный смысл этого примера вскрыт в работе [4°]. — *Прим. перев.*

9. Пусть $a, b \geqslant 0$; тогда $(a \mid b)$ есть обозначение Фробениуса (§ 1) для разбиения $(a+1, 1^b)$. В силу формулы (3.4)

$$s_{(a \mid b)} = h_{a+1}e_b - h_{a+2}e_{b-1} + \ldots + (-1)^b h_{a+b+1}.$$

Если a или b отрицательно, *определим* $s_{(a \mid b)}$ посредством этой формулы. Отсюда следует, что (когда a или b отрицательно) $s_{(a \mid b)} = 0$, кроме случая, когда $a + b = -1$, а в этом случае $s_{(a \mid b)} = (-1)^b$.

Пусть теперь λ — произвольное разбиение длины $\leqslant n$. Умножая матрицу $\left(h_{\lambda_i - i + j}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ справа на матрицу $\left((-1)^{j-1} e_{n+1-j-k}\right)_{1 \leqslant j,\, k \leqslant n}$, мы получим матрицу $\left(s_{(\lambda_i - i \mid n-k)}\right)_{1 \leqslant i,\, k \leqslant n}$. Беря определители и используя пример 4 § 1, мы приходим к формуле

$$s_{(\alpha \mid \beta)} = \det\left(s_{(\alpha_i \mid \beta_j)}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant r}, \qquad \text{где} \qquad (\alpha \mid \beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r \mid \beta_1, \ldots, \beta_r).$$

10. $$s_\lambda(1 + x_1, 1 + x_2, \ldots, 1 + x_n) = \sum_\mu d_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, \ldots, x_n),$$

причем сумма берется по всем разбиениям $\mu \subset \lambda$, а

$$d_{\lambda\mu} = \det\left(\binom{\lambda_i + n - i}{\mu_j + n - j}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}.$$

Вычислите $a_{\lambda+\delta}(1 + x_1, \ldots, 1 + x_n)$ и заметьте, что $a_\delta(1 + x_1, \ldots, 1 + x_n) = a_\delta(x_1, \ldots, x_n)$.)

Эту формулу можно использовать для вычисления классов Чженя внешнего квадрата $\Lambda^2 E$ и симметрического квадрата $S^2 E$ векторного расслоения E. Если $c(E) = \prod_{i=1}^m (1 + x_i)$ — полный класс Чженя расслоения E, то

$$c(\Lambda^2 E) = \prod_{i<j}(1 + x_i + x_j) = 2^{-m(m-1)/2} \prod_{i<j}(1 + 2x_i + 1 + 2x_j) =$$
$$= 2^{-m(m-1)/2} s_\delta(1 + 2x_1, \ldots, 1 + 2x_m)$$

в силу примера 7, где $\delta = (m-1, m-2, \ldots, 0)$, и, следовательно,

$$c(\Lambda^2 E) = 2^{-m(m-1)/2} \sum_{\mu \subset \delta} d_{\delta\mu} 2^{|\mu|} s_\mu(x_1, \ldots, x_m).$$

Аналогично

$$c(S^2 E) = \prod_{i \leqslant j}(1 + x_i + x_j) = 2^{-m(m-1)/2} \sum_{\nu \subset \varepsilon} d_{\varepsilon\nu} 2^{|\nu|} s_\nu(x_1, \ldots, x_m),$$

где $\varepsilon = (m, m-1, \ldots, 1)$.

11. Пусть $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — разбиение длины $\leqslant n$, а r — положительное целое число. Тогда, работая с переменными $x_1, \ldots, x_n$, мы получаем

$$a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{q=1}^n a_{\mu+\delta+r\varepsilon_q}, \tag{1}$$

где ε_q — последовательность с 1 на q-м месте и 0 в остальных местах. Расположим последовательность $\mu + \delta + r\varepsilon_q$ в убывающем порядке. Если два ее члена равны, то она не вносит вклада в (1). Мы можем, следова-

тельно, считать, что для некоторых $p \leqslant q$

$$\mu_{p-1}+n-p+1>\mu_q+n-q+r>\mu_p+n-p,$$

и в этом случае $a_{\mu+\delta+r\varepsilon_q}=(-1)^{q-p}a_{\lambda+\delta}$, где λ — разбиение

$$\lambda=(\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}, \mu_q+p-q+r, \mu_p+1, \ldots, \mu_{q-1}+1, \mu_{q+1}, \ldots, \mu_n);$$

значит, разность $\theta=\lambda-\mu$ является косым r-крюком. Определим высоту $\operatorname{ht}(\theta)$ косого крюка θ как уменьшенное на единицу число строк, которые он занимает. В этой терминологии предыдущее обсуждение показывает, что

(2) $$s_\mu p_r=\sum_\lambda(-1)^{\operatorname{ht}(\lambda-\mu)}s_\lambda,$$

где сумма берется по всем разбиениям $\lambda\supset\mu$, таким, что $\lambda-\mu$ есть косой r-крюк.

Из (2) вытекает, что для любых трех разбиений λ, μ, ρ, таких, что $|\lambda|=|\mu|+|\rho|$, коэффициент при s_λ в произведении $s_\mu p_\rho$ есть $\sum_S(-1)^{\operatorname{ht}(S)}$, где сумма берется по всевозможным последовательностям разбиений $S=(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$, таким, что $\mu=\lambda^{(0)}\subset\lambda^{(1)}\subset\ldots\subset\lambda^{(m)}=\lambda$, каждая разность $\lambda^{(i)}-\lambda^{(i-1)}$ является косым ρ_i-крюком и

$$\operatorname{ht}(S)=\sum_i\operatorname{ht}(\lambda^{(i)}-\lambda^{(i-1)}).$$

12. Пусть $\sigma\colon Z[x_1, \ldots, x_n]\to\Lambda_n$ есть Z-линейное отображение, определяемое формулой $\sigma(x^\alpha)=s_\alpha$ для всех $\alpha\in\mathrm{N}^n$. Тогда σ Λ_n-линейно, т. е. $\sigma(fg)=f\sigma(g)$ для $f\in\Lambda_n$ и $g\in Z[x_1, \ldots, x_n]$. В самом деле $\sigma(x^\alpha)=a_\delta^{-1}\boldsymbol{a}(x^{\alpha+\delta})$, где

$$\boldsymbol{a}=\sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\,w$$

— оператор антисимметризации. По линейности $\sigma(g)=a_\delta^{-1}\boldsymbol{a}(gx^\delta)$ для всех $g\in Z[x_1, \ldots, x_n]$, и наш результат вытекает из того факта, что оператор $\boldsymbol{a}$ Λ_n-линеен.

13*. Если $a, b\geqslant 0$, то

$$(a+b+1)\,a!\,b!\,s_{(a\mid b)}=\begin{vmatrix} p_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0\\ p_2 & p_1 & c_2 & \ldots & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ p_{a+b} & & \ldots & & c_{a+b}\\ p_{a+b+1} & & \ldots & & p_1 \end{vmatrix},$$

где $(c_1, \ldots, c_{a+b})=(-1, -2, \ldots, -a, b, b-1, \ldots, 1)$. [Воспользуйтесь соотношением $s_{(a\mid b)}+s_{(a+1\mid b-1)}=h_{a+1}e_b$, вытекающим из первой формулы в примере 9, а также формулами из примера 8 § 2 и индукцией по b.]

14*. $$\prod_{i\geqslant 1}\frac{1+ux_i}{1-tx_i}=E(u)\,H(t)=1+(t+u)\sum_{a, b\geqslant 0}s_{(a\mid b)}t^au^b.$$

15*. Пусть M — некоторая $n \times n$-матрица с собственными значениями $x_1, \ldots, x_n$. Тогда для всех целых $r \geqslant 0$ выполняется равенство

$$M^{n+r} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p s_{(r\mid p)}(x_1, \ldots, x_n) M^{n-p-1}.$$

[Если $M^{n+r} = \sum_p a_p M^{n-p-1}$, то $x_i^{n+r} = \sum_p a_p x_i^{n-p-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; из этой системы уравнений находятся коэффициенты $a_0, \ldots, a_{n-1}$.]

16*. Пусть λ, μ — разбиения длины $\leqslant n$; положим

$$P_n(\lambda, \mu) = \det \left(p_{\lambda_i+\mu_j+2n-i-j}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$$

(считая, что $p_0 = n$). Тогда в Λ_n выполняются равенства

$$s_\lambda = P_n(\lambda, \mu)/P_n(0, \mu), \quad s_\lambda s_\mu = P_n(\lambda, \mu)/P_n(0, 0).$$

[Заметьте, что $P_n(\lambda, \mu) = a_{\lambda+\delta} a_{\mu+\delta}$.]

17*. (a) Пусть p — целое число $\geqslant 2$, и пусть $\omega = e^{2\pi i/p}$. Если λ — произвольное разбиение длины $\leqslant p$, то

$$(*) \qquad s_\lambda(1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \frac{\omega^{\lambda_i+p-i} - \omega^{\lambda_j+p-j}}{\omega^{p-i} - \omega^{p-j}},$$

откуда следует, что $s_\lambda(1, \omega, \ldots, \omega^{p-1})$ равняется ± 1, если $\lambda \underset{p}{\sim} 0$ (пример 6(d) § 1), и равняется нулю в противном случае. Точнее, если $\lambda \underset{p}{\sim} 0$, то

$$s_\lambda(1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}) = \sigma_p(\lambda),$$

где $\sigma_p(\lambda)$ — это знак $\varepsilon(w)$ единственного элемента $w \in S_p$, такого, что $\lambda + \delta_p \equiv w\delta_p \pmod p$, где $\delta_p = (p-1, p-2, \ldots, 1, 0)$.

(b) В дальнейшем будем предполагать, что p — нечетное простое число. Тогда

$$E(t) = \prod_{i=1}^{p} (1 + \omega^{i-1} t) = 1 + t^p \equiv (1+t)^p \pmod p,$$

а значит, $s_\lambda(1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}) \equiv s_\lambda(1, 1, \ldots, 1) \pmod p = \binom{p}{\lambda'}$ (пример 4).

Таким образом, $\binom{p}{\lambda} \equiv 0 \pmod p$, за исключением случая, когда $\lambda \underset{p}{\sim} 0$.

(c) Пусть $q \not\equiv p$ — другое нечетное простое число, и пусть $\lambda = (q-1)\delta_p$. Тогда

$$s_\lambda(1, 1, \ldots, 1) = q^{p(p-1)/2} \equiv \left(\frac{q}{p}\right) \pmod p,$$

где $\left(\frac{q}{p}\right)$ — символ Лежандра, равный $+1$ или -1 в зависимости от того, является или нет число q квадратичным вычетом по модулю p.

(d) Из (a), (b) и (c) вытекает, что $s_{(q-1)\delta_p}(1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

С другой стороны, из формулы (*) в п. (a) вытекает, что $s_{(q-1)\delta_p}(1, \omega, \ldots$ $\ldots, \omega^{p-1})$ есть p-я степень вещественного числа $\prod_{i \in S} (\omega^{iq} - \omega^{-iq})/(\omega^i -$

$-\omega^{-i})$, где $S=\{1, 2, \ldots, (p-1)/2\}$. Следовательно,

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\prod_{i\in S}\frac{\omega^{iq}-\omega^{-iq}}{\omega^{i}-\omega^{-i}}.$$

(e) Пусть $\zeta=e^{2\pi i/q}$. Тогда

$$\frac{\omega^{iq}-\omega^{-iq}}{\omega^{i}-\omega^{-i}}=\prod_{j=1}^{q-1}(\omega^{i}-\zeta^{j}\omega^{-i})=\prod_{j\in T}(\zeta^{j}\omega^{i}-\zeta^{-j}\omega^{-i})(\zeta^{-j}\omega^{i}-\zeta^{j}\omega^{-i}),$$

где $T=\{1, 2, \ldots, (q-1)/2\}$. Таким образом,

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\prod_{i\in S,\, j\in T}(\zeta^{j}\omega^{i}-\zeta^{-j}\omega^{-i})(\zeta^{-j}\omega^{i}-\zeta^{j}\omega^{-i}).$$

Выведите отсюда, что

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}\left(\frac{p}{q}\right)$$

(квадратичный закон взаимности).

Замечания и библиографические указания

S-функции впервые рассматривались Якоби [20] как частные от деления кососимметрических многочленов на многочлен a_δ; мы ввели их точно таким же образом. Их место в теории представлений симметрических и полных линейных групп, которое мы опишем позднее, было обнаружено значительно позже Шуром [44]. Название «S-функция» (или «функция Шура») принадлежит Литтлвуду и Ричардсону [28]. Тождество (3.4), выражающее s_λ через функции h, первоначально появилось у Якоби [20] и часто называется тождеством Якоби — Труди.

Результаты примеров 1—4 можно найти в книге Литтлвуда [29], гл. VII, в которой приведены и другие результаты того же сорта. Формула из примера 8 для выражения произведения двух S-функций в виде определителя от функций h по существу принадлежит Якоби (цит. выше), хотя и переоткрывалась впоследствии. Результат примера 9 принадлежит Джамбелли [56]. Пример 10 принадлежит Ласку [26].

Доказательство квадратичного закона взаимности, намеченное в примере 17, по существу совпадает с доказательством Эйзенштейна (см. Ж. — П. Серр, Курс арифметики, приложение к гл. I). Данное здесь изложение принадлежит Кацу [35]*.

4. Ортогональность

Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$ — две конечные или бесконечные последовательности независимых переменных. Мы будем обозначать симметрические функции от пере-

менных x через $s_\lambda(x)$, $p_\lambda(x)$ и т. д., а симметрические функции от переменных y — через $s_\lambda(y)$, $p_\lambda(y)$ и т. д.

Мы дадим три разложения в ряд для произведения $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$.

Первым из них является

$$(4.1)\qquad \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda(x)\,p_\lambda(y),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ.

Это вытекает из формулы (2.14), примененной к множеству переменных x_iy_j.

Далее,

$$(4.2)\qquad \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\lambda h_\lambda(x)\,m_\lambda(y)=\sum_\lambda m_\lambda(x)\,h_\lambda(y),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ.

Доказательство. Имеем

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\prod_j H(y_j)=\prod_j\sum_{r=0}^{\infty}h_r(x)\,y_j^r=$$
$$=\sum_\alpha h_\alpha(x)\,y^\alpha=\sum_\lambda h_\lambda(x)\,m_\lambda(y),$$

где α пробегает все последовательности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ неотрицательных целых чисел, такие, что $\sum\alpha_i<\infty$, а λ пробегает все разбиения. ∎

Третьим тождеством является

$$(4.3)\qquad \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\lambda s_\lambda(x)\,s_\lambda(y),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ.

Доказательство. Наше тождество есть следствие (4.2) и (3.7′). Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — два конечных множества переменных, и пусть, как обычно, $\delta=(n-1, n-2, \ldots, 0)$. Тогда в силу (4.2)

$$(4.4)\qquad a_\delta(x)\,a_\delta(y)\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-1}=a_\delta(x)\sum_{\alpha,w}h_\alpha(x)\,\varepsilon(w)\,y^{\alpha+w\delta}$$

(суммирование по $\alpha\in\mathbb{N}^n$ и $w\in S_n$) $=$

$$=a_\delta(x)\sum_{\beta,w}\varepsilon(w)\,h_{\beta-w\delta}(x)\,y^\beta=\sum_\beta a_\beta(x)\,y^\beta$$

в силу (3.7′). Поскольку $a_{w\beta}=\varepsilon(w)\,a_\beta$, последняя сумма равняется $\sum a_\gamma(x)\,a_\gamma(y)$ (суммирование по $\gamma_1\geq\gamma_2\geq\ldots$

$\ldots > \gamma_n \geqslant 0)$, т. е. она равняется

$$\sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x)\, a_{\lambda+\delta}(y),$$

где сумма берется по разбиениям λ длины $\leqslant n$. Это доказывает (4.3) в случае n переменных x_i и n переменных y_i; теперь, как обычно, пусть $n \to \infty$. ∎

Определим далее скалярное произведение на Λ, т. е. билинейную форму $\langle u, v\rangle$ со значениями в Z, потребовав, чтобы базисы (h_λ) и (m_λ) были двойственны друг другу:

(4.5) $$\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

для всех разбиений λ и μ, где $\delta_{\lambda\mu}$ — дельта-символ Кронекера.

(4.6) *Для всех $n \geqslant 0$ пусть (u_λ) и (v_λ) — два $\mathbf{Q}$-базиса в $\Lambda^n_{\mathbf{Q}}$, параметризованные разбиениями числа n. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$ *для всех* λ, μ;

(b) $\sum_\lambda u_\lambda(x)\, v_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1}$.

Доказательство. Пусть

$$u_\lambda = \sum_\rho a_{\lambda\rho} h_\rho, \qquad v_\mu = \sum_\sigma b_{\mu\sigma} m_\sigma.$$

Тогда

$$\langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \sum_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho},$$

так что утверждение (a) эквивалентно

(a′) $$\sum_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho} = \delta_{\lambda\mu}.$$

В свою очередь утверждение (b) эквивалентно тождеству

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)\, v_\lambda(y) = \sum_\rho h_\rho(x)\, m_\rho(y)$$

в силу (4.2), а значит, эквивалентно

(b′) $$\sum_\lambda a_{\lambda\rho} b_{\lambda\sigma} = \delta_{\rho\sigma}.$$

Поскольку (a′) и (b′) эквивалентны, то (a) и (b) также эквивалентны. ∎

Из (4.6) и (4.1) вытекает, что

(4.7) $$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda,$$

так что p_λ образуют *ортогональный* базис в $\Lambda_{\mathbf{Q}}$. Аналогично из (4.6) и (4.3) получаем

(4.8) $$\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

так что функции s_λ образуют *ортонормированный* базис в Λ, а те s_λ, для которых $|\lambda|=n$, образуют ортонормированный базис в Λ^n. Таким образом, любой другой ортонормированный базис в Λ^n должен получаться из базиса (s_λ) преобразованием с помощью целочисленной ортогональной матрицы. Но единственные такие матрицы — это матрицы перестановок с возможной переменой знаков, следовательно, (4.8) характеризует функции s_λ с точностью до порядка и знака.

Мы видим также из (4.7) или (4.8), что

(4.9) *Билинейная форма $\langle u, v\rangle$ симметрична и положительно определена.* ∎

(4.10) *Инволюция ω есть изометрия, т. е. $\langle \omega u, \omega v\rangle = \langle u, v\rangle$.*

Доказательство. Из (2.13) получаем, что $\omega(p_\lambda) = \pm p_\lambda$, значит, в силу (4.7) имеем $\langle \omega(p_\lambda), \omega(p_\mu)\rangle = \langle p_\lambda, p_\mu\rangle$, что доказывает (4.10), так как функции p_λ образуют $\mathbb{Q}$-базис в $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ (2.12). ∎

Наконец, в силу (4.10) и (4.5) $\langle e_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$, где $f_\mu = \omega(m_\mu)$, т. е. (e_λ) и (f_λ) — двойственные базисы в Λ.

Замечания. 1. Применяя инволюцию ω к симметрическим функциям от переменных x, мы получим из (4.1), (4.2) и (4.3) три разложения в ряд для произведения $\prod_{i,j}(1+x_iy_j)$, а именно

(4.1′) $$\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x)\, p_\lambda(y),$$

(4.2′) $$\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = \sum_\lambda m_\lambda(x)\, e_\lambda(y) = \sum_\lambda e_\lambda(x)\, m_\lambda(y),$$

(4.3′) $$\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = \sum_\lambda s_\lambda(x)\, s_{\lambda'}(y),$$

последнее с помощью (3.8).

2. Если x, y — элементы λ-кольца R, то

$$\sigma_t(xy) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1}\psi^\lambda(x)\,\psi^\lambda(y)\,t^{|\lambda|} = \sum_\lambda S^\lambda(x)\,S^\lambda(y)\,t^{|\lambda|}$$

в силу (4.1) и (4.3) и

$$\lambda_t(xy) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1}\psi^\lambda(x)\,\psi^\lambda(y)\,t^{|\lambda|} = \sum_\lambda S^\lambda(x)\,S^{\lambda'}(y)\,t^{|\lambda|}$$

в силу (4.1′) и (4.3′).

Примеры

1. Взяв в (4.3′) $y_1 = \ldots = y_n = t$, $y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots = 0$, мы получим

$$E(t)^n = \sum_\lambda s_\lambda(x)\, s_{\lambda'}(y) = \sum_\lambda \binom{n}{\lambda} s_\lambda(x)\, t^{|\lambda|}$$

в обозначениях примера 4 § 3.

Коэффициенты при степенях t в обеих частях являются многочленами от n (с коэффициентами из Λ), которые совпадают при всех положительных целых значениях n, а значит, тождественно равны. Следовательно,

$$E(t)^X = \sum_{\lambda} \binom{X}{\lambda} s_\lambda t^{|\lambda|}$$

для всех X. Заменяя X, t на $-X$, $-t$, мы получим

$$H(t)^X = \sum_{\lambda} \binom{X}{\lambda'} s_\lambda t^{|\lambda|}.$$

Эти тождества обобщают биномиальную теорему.

2. Пусть $y_i = q^{i-1}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $y_i = 0$ при $i > n$. В обозначениях примера 1 § 3 мы получаем из (4.3′)

$$\prod_{i=1}^{n} E(q^{i-1}) = \sum_{\lambda} q^{n(\lambda')} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} s_\lambda.$$

Аналогично из (4.3)

$$\prod_{i=1}^{n} H(q^{i-1}) = \sum_{\lambda} q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda' \end{bmatrix} s_\lambda.$$

Переходя в этих формулах к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$\prod_{i,\, j \geqslant 1} \left(1 + x_j q^{i-1}\right) = \sum_{\lambda} \frac{q^{n(\lambda')}}{H_\lambda(q)} s_\lambda(x),$$

$$\prod_{i,\, j \geqslant 1} \left(1 - x_j q^{i-1}\right)^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{q^{n(\lambda)}}{H_\lambda(q)} s_\lambda(x),$$

где $H_\lambda(q) = \prod_{x \in \lambda} (1 - q^{h(x)})$ — многочлен длин крюков, соответствующий разбиению λ.

3. Положим $y_1 = \ldots = y_n = t/n$, $y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots = 0$, и пусть $n \to \infty$. Тогда

$$\prod_{i} \left(1 + \frac{x_i t}{n}\right)^n \to \prod_{i} \exp(x_i t) = \exp(e_1 t),$$

$$\frac{1}{n^{|\lambda|}} \binom{n}{\lambda} \to \prod_{x \in \lambda} h(x)^{-1} = h(\lambda)^{-1},$$

где $h(\lambda)$ есть произведение длин крюков диаграммы λ. Значит, мы получаем из (4.3′)

$$\exp(e_1 t) = \sum_{\lambda} \frac{s_\lambda}{h(\lambda)} t^{|\lambda|},$$

и, следовательно,

$$e_1^n = \sum_{|\lambda| = n} \frac{n!}{h(\lambda)} s_\lambda.$$

или, что эквивалентно,
$$\left\langle e_1^n, s_\lambda \right\rangle = n!/h(\lambda).$$

4. В силу (2.14′) и (4.7) $\langle h_n, p_\lambda \rangle = 1$ для всех разбиений λ числа n. Двойственным образом,
$$\langle e_n, p_\lambda \rangle = \varepsilon_\lambda.$$

5.
$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x_i + y_j) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\tilde{\lambda}'}(y),$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, таким, что $\lambda_1 \leqslant n$ (т. е. $\lambda \subset (n^m)$), а $\tilde{\lambda}' = (m - \lambda_n', \ldots, m - \lambda_1')$ (в (4.1′) замените y_i на y_i^{-1} и освободитесь от знаменателей). Значит, в силу примера 10 § 3
$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 + x_i + y_j) = \sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda, \mu} s_\mu(x) s_{\tilde{\lambda}'}(y),$$

где суммирование ведется по парам разбиений λ, μ, таким, что $\mu \subset \lambda \subset (n^m)$. Эта формула дает классы Чженя тензорного произведения $E \otimes F$ векторных расслоений, так как если $c(E) = \prod (1 + x_i)$ и $c(F) = \prod (1 + y_j)$ — полные классы Чженя расслоений E и F, то $c(E \otimes F) = \prod (1 + x_i + y_j)$.

6. Пусть $\Delta = \det\left((1 - x_i y_j)^{-1}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ (определитель Коши). Тогда
$$\Delta = a_\delta(x) a_\delta(y) \sum_{i, j=1}^{n} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

В самом деле, умножив все элементы i-й строки матрицы $\left((1 - x_i y_j)^{-1}\right)$ на $\prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)$, мы получим матрицу D, элемент (i, j) которой есть
$$\prod_{r \neq j} (1 - x_i y_r) = \sum_{k=1}^{n} x_i^{n-k} (-1)^{n-k} e_{n-k}^{(j)}(y)$$

в обозначениях (3.6). Это показывает, что $D = A_\delta(x) M(y)$, так что $\det(D) = a_\delta(x) a_\delta(y)$. С другой стороны, из определения D ясно, что $\det(D) = \Delta \cdot \prod (1 - x_i y_j)$.

Кроме того, так как
$$\Delta = \det\left(1 + x_i y_j + x_i^2 y_j^2 + \ldots\right) = \sum_\alpha \det\left(x_i^{\alpha_j} y_j^{\alpha_j}\right) = \sum_\alpha a_\alpha(x) y^\alpha,$$

где суммирование идет по всем $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, то
$$\Delta = \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ длины $\leqslant n$. Отсюда получаем другое доказательство (4.3).

7. Аналогично тождество (4.3′) можно доказать прямо, не обращаясь к двойственности. Рассмотрим определитель Вандермонда $a_\delta(x, y)$ от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; с одной стороны, он равен

$a_\delta(x)\,a_\delta(y)\prod(x_i-y_j)$; с другой стороны, раскладывая этот определитель по правилу Лапласа, мы убедимся, что он равен

(1) $$\sum_\mu (-1)^{e(\mu)} a_\mu(x)\,a_{\bar\mu}(y),$$

где суммирование идет по $\mu \in \mathbf{N}^n$, таким, что $2n-1 \geqslant \mu_1 > \mu_2 > \ldots \ldots > \mu_n \geqslant 0$, $\bar\mu$ есть строго возрастающая последовательность, состоящая из целых чисел в $[0, 2n-1]$, отличных от всех μ_i, а $e(\mu) = \sum (2n-i-\mu_i)$. Записывая $\mu = \lambda + \delta$ и используя (1.7), мы видим, что выражение (1) равняется

$$(y_1 \ldots y_n)^{2n-1} \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x)\,a_{\lambda'+\delta}(y^{-1}),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ, таким, что $l(\lambda) \leqslant n$ и $l(\lambda') \leqslant n$. Заменяя теперь каждое y_i на y_i^{-1}, мы получим (4.3′).

Замечания и библиографические указания

Скалярное произведение на Λ, по-видимому, было впервые введено Холлом [17]. Пример 5 принадлежит Ласку [26].

5. Косые S-функции

Каждая симметрическая функция $f \in \Lambda$ однозначно определяется своими скалярными произведениями с функциями s_λ, а именно

$$f = \sum_\lambda \langle f, s_\lambda\rangle s_\lambda,$$

так как s_λ образуют ортонормированный базис в Λ (4.8).

Пусть λ и μ — разбиения; определим симметрическую функцию $s_{\lambda/\mu}$ соотношениями

(5.1) $$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu\rangle$$

для всех разбиений ν. Функции $s_{\lambda/\mu}$ называются *косыми S-функциями*. Эквивалентно, если $c^\lambda_{\mu\nu}$ — целые числа, определенные формулой

(5.2) $$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda,$$

то

(5.3) $$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu.$$

В частности, ясно, что $s_{\lambda/0} = s_\lambda$, где 0 обозначает нулевое разбиение. Кроме того, $c^\lambda_{\mu\nu} = 0$, за исключением случая, когда $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$, так что функция $s_{\lambda/\mu}$ однородна степени $|\lambda| - |\mu|$ и обращается в 0, если $|\lambda| < |\mu|$. (Мы вскоре увидим, что $s_{\lambda/\mu} = 0$, если не выполняется включение $\lambda \supset \mu$.)

Пусть теперь $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$ — два множества переменных. Тогда

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda,\mu} c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu(x) s_\lambda(y) = \sum_\nu s_\nu(x) s_\mu(y) s_\nu(y)$$

в силу (5.2) и (5.3) и, следовательно,

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = s_\mu(y) \sum_\nu h_\nu(x) m_\nu(y)$$

в силу (4.2) и (4.3). Предположим теперь, что $y=(y_1, \ldots \ldots, y_n)$, так что указанные выше суммы берутся только по разбиениям λ и ν длины $\leqslant n$. Тогда предыдущее равенство можно записать в виде

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) = \sum_\nu h_\nu(x) m_\nu(y) a_{\mu+\delta}(y) =$$
$$= \sum_\alpha h_\alpha(x) \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) y^{\alpha + w(\mu+\delta)}$$

(сумма по $\alpha \in \mathbb{N}^n$). Значит, $s_{\lambda/\mu}(x)$ равняется коэффициенту при $y^{\lambda+\delta}$ в этой сумме, т. е.

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) h_{\lambda+\delta-w(\mu+\delta)},$$

с обычным соглашением, что $h_\alpha = 0$, если хотя бы одна компонента α_i вектора α отрицательна. Эта формула может быть также записана в детерминантной форме

$$s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \tag{5.4}$$

где $n \geqslant l(\lambda)$.

При $\mu=0$ формула (5.4) превращается в (3.4).

Из (5.4) и (2.9) получаем также

$$s_{\lambda/\mu} = \det\left(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}, \tag{5.5}$$

где $m \geqslant l(\lambda')$, и, следовательно,

$$\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'}. \tag{5.6}$$

Из (5.4) вытекает, что $s_{\lambda/\mu}=0$, за исключением случая, когда $\lambda_i \geqslant \mu_i$ при всех i, т. е. когда $\lambda \supset \mu$. В самом деле, если $\lambda_r < \mu_r$ для некоторого r, то $\lambda_i \leqslant \lambda_r < \mu_r \leqslant \mu_j$ при $1 \leqslant j \leqslant \leqslant r \leqslant i \leqslant n$, и, следовательно, $\lambda_i - \mu_j - i + j < 0$ для этой области значений (i, j). Поэтому матрица $\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)$ имеет $(n-r+1)\times r$-блок из нулей в левом нижнем углу, а значит, ее определитель обращается в 0.

Те же рассмотрения показывают, что если $\lambda \supset \mu$ и $\mu_r \geqslant \lambda_{r+1}$ для некоторого $r < n$, то матрица $\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A состоит из r строк и столбцов, а

B — из $n-r$ строк и столбцов, так что ее определитель равен $\det(A)\det(B)$. Значит, если косая диаграмма $\lambda-\mu$ состоит из двух не связанных между собой кусков θ, φ (каждый из которых есть косая диаграмма), то $s_{\lambda/\mu}=s_\theta\cdot s_\varphi$. Суммируя, получаем

(5.7) *Косая S-функция $s_{\lambda/\mu}$ обращается в 0, за исключением случая, когда $\lambda\supset\mu$, а в этом случае она зависит только от косой диаграммы $\lambda-\mu$. Если θ_i — компоненты (§ 1) диаграммы $\lambda-\mu$, то $s_{\lambda/\mu}=\prod s_{\theta_i}$.* ∎

Когда число переменных x_i конечно, можно сказать больше:

(5.8) $s_{\lambda/\mu}(x_1, \ldots, x_n)=0$, *за исключением случая, когда* $0\leqslant\lambda'_i-\mu'_i\leqslant n$ *для всех* $i\geqslant 1$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda'_r-\mu'_r>n$ для некоторого $r\geqslant 1$. Поскольку $e_{n+1}=e_{n+2}=\ldots=0$, как и выше, мы получаем, что матрица $\left(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\right)$ имеет прямоугольный блок из нулей в правом верхнем углу, причем одна из вершин этого прямоугольника лежит на главной диагонали, а значит, определитель обращается в 0. ∎

Пусть теперь $x=(x_1, x_2, \ldots)$, $y=(y_1, y_2, \ldots)$ и $z=(z_1, z_2, \ldots)$ — три множества независимых переменных. Тогда в силу (5.2)

$$\text{(a)}\qquad \sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda/\mu}(x)\,s_\lambda(z)\,s_\mu(y)=\sum_\mu s_\mu(y)\,s_\mu(z)\prod_{i,k}(1-x_iz_k)^{-1},$$

что по (4.3) равняется

$$\prod_{i,k}(1-x_iz_k)^{-1}\prod_{j,k}(1-y_jz_k)^{-1}$$

и, следовательно, равняется также

$$\text{(b)}\qquad \sum_\lambda s_\lambda(x, y)\,s_\lambda(z),$$

где $s_\lambda(x, y)$ обозначает S-функцию, соответствующую разбиению λ, от множества переменных $(x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots)$. Приравнивая (a) и (b), мы заключаем, что

$$(5.9)\qquad s_\lambda(x, y)=\sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x)\,s_\mu(y)=\sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu\nu}s_\mu(y)\,s_\nu(x).$$

Более общим образом,

$$(5.10)\qquad s_{\lambda/\mu}(x, y)=\sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x)\,s_{\nu/\mu}(y),$$

где сумма берется по разбиениям ν, таким, что $\lambda\supset\nu\supset\mu$,

Доказательство. Из (5.9) получаем

$$\sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x,\ y)\, s_\mu(z) = s_\lambda(x,\ y,\ z) =$$
$$= \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x)\, s_\nu(y,\ z) = \sum_{\mu,\ \nu} s_{\lambda/\nu}(x)\, s_{\nu/\mu}(y)\, s_\mu(z)$$

снова в силу (5.9); приравняем теперь коэффициенты при $s_\mu(z)$ на обоих концах этой цепочки равенств. ∎

Формулу (5.10), очевидно, можно обобщить следующим образом. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — это n множеств переменных и λ, μ — разбиения. Тогда

(5.11) $$s_{\lambda/\mu}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum_{(\nu)} \prod_{i=1}^{n} s_{\nu^{(i)}/\nu^{(i-1)}}(x^{(i)}),$$

где суммирование идет по всем последовательностям $(\nu) = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)})$ *разбиений, таким, что* $\nu^{(0)} = \mu$, $\nu^{(n)} = \lambda$ *и* $\nu^{(0)} \subset \nu^{(1)} \subset \ldots \subset \nu^{(n)}$. ∎

Применим (5.11) в случае, когда каждое множество переменных $x^{(i)}$ состоит из единственного переменного x_i. Для единственного x из (5.8) вытекает, что $s_{\lambda/\mu}(x) = 0$, если $\lambda - \mu$ не является *горизонтальной полосой* (§ 1), а в этом случае $s_{\lambda/\mu}(x) = x^{|\lambda-\mu|}$. Отсюда следует, что каждое из произведений в сумме в правой части (5.11) есть одночлен $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i = |\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}|$, и, значит, мы представили $s_{\lambda/\mu}(x_1, \ldots, x_n)$ как сумму одночленов x^α, по одному на каждую *таблицу* (§ 1) T формы $\lambda - \mu$. Мы будем писать x^T вместо x^α, если вес T есть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тогда

(5.12) $$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T,$$

где сумма берется по всем таблицам T формы $\lambda - \mu$. ∎

Для каждого разбиения ν, такого, что $|\nu| = |\lambda - \mu|$, обозначим через $K_{\lambda-\mu,\nu}$ число таблиц формы $\lambda - \mu$ и веса ν. В силу (5.12)

(5.13) $$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu K_{\lambda-\mu,\nu} m_\nu,$$

и, следовательно,

(5.14) $$K_{\lambda-\mu,\nu} = \langle s_{\lambda/\mu},\ h_\nu\rangle = \langle s_\lambda,\ s_\mu h_\nu\rangle,$$

так что

(5.15) $$s_\mu h_\nu = \sum_\lambda K_{\lambda-\mu,\nu} s_\lambda.$$

В частности, предположим, что $\nu = (r)$ — разбиение с единственной ненулевой частью. Тогда $K_{\lambda-\mu,(r)}$ есть 1 или 0 в за-

висимости от того, является или нет диаграмма $\lambda-\mu$ горизонтальной r-полосой, и, значит, в силу (5.15)

$$s_\mu h_r = \sum_\lambda s_\lambda, \tag{5.16}$$

где сумма берется по всем разбиениям λ, таким, что $\lambda-\mu$ есть горизонтальная r-полоса. ∎

Применяя к (5.16) инволюцию ω, мы получим, что

$$s_\mu e_r = \sum_\lambda s_\lambda, \tag{5.17}$$

где сумма берется по всем разбиениям λ, таким, что $\lambda-\mu$ есть вертикальная r-полоса. ∎

Замечания. 1. Легко дать прямое доказательство (5.17). Рассмотрим (для конечного числа переменных $x_1, \ldots, x_n$) произведение

$$a_{\mu+\delta}e_r = \sum_{w\in S_n} \varepsilon(w)\, x^{w(\mu+\delta)} \sum_\alpha x^\alpha = \sum_\alpha a_{\mu+\alpha+\delta},$$

где сумма берется по всем $\alpha\in\mathbb{N}^n$, таким, что все α_i равны 0 или 1 и $\sum\alpha_i = r$. Для таких α последовательность

$$\mu+\alpha+\delta = (\mu_1+\alpha_1+n-1,\ \mu_2+\alpha_2+n-2,\ \ldots,\ \mu_n+\alpha_n)$$

расположена в невозрастающем порядке, так что мы должны только выбросить те α, для которых какие-нибудь два ее соседних члена совпадают. У нас останутся те α, для которых $\lambda=\mu+\alpha$ есть *разбиение*, т. е. такие, что $\lambda-\mu$ — вертикальная r-полоса. Это доказывает (5.17), а значит, по двойственности и (5.16). Мы можем теперь провести остальные рассуждения в обратном порядке: (5.16) влечет за собой равенство (5.15) с помощью индукции по длине разбиения ν, а значит, и (5.14), которое в свою очередь есть просто переформулировка (5.13).

2. Предложение (5.12) лежит в основе приложения S-функций к перечислению плоских разбиений (см. примеры в конце этого раздела). По этой причине специалисты по комбинаторике часто предпочитают принимать (5.12) за определение S-функций (см., например, [51]). Преимущество такого подхода состоит в том, что мы сразу имеем простое явное определение, но почему должно быть выбрано именно такое определение, заранее непонятно[1]).

3. В произвольном λ-кольце можно определить операции $S^{\lambda/\mu}$ по формуле (5.3):

$$S^{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu} S^\nu.$$

---

[1]) Кроме того, при таком подходе нужно отдельно доказывать симметричность функции $s_{\lambda/\mu}$, а это не совсем тривиально. — *Прим. перев.*

Тогда, например, (5.9) принимает вид теоремы сложения:

$$S^{\lambda}(x+y)=\sum_{\mu} S^{\lambda/\mu}(x)\,S^{\mu}(y)$$

для любых двух элементов x, y λ-кольца. Аналогично интерпретируются остальные формулы этого раздела.

Примеры

1. Пусть $\lambda-\mu$ — горизонтальная полоса. Тогда $s_{\lambda/\mu}=h_{\nu}=h_{\nu_1}h_{\nu_2}\ldots$, где числа ν_i — длины компонент нашей полосы (примените (5.7)). Аналогично если $\lambda-\mu$ есть вертикальная полоса, то $s_{\lambda/\mu}=e_{\nu_1}e_{\nu_2}\ldots$, где числа ν_i — снова длины компонент этой полосы.

2. Пусть λ — разбиение числа n. Тогда число стандартных таблиц формы λ есть $K_{\lambda,(1^n)}=\langle s_\lambda, h_1^n\rangle$ в силу (5.14). Согласно примеру 3 § 4, отсюда следует, что число стандартных таблиц формы λ равно $n!/h(\lambda)$, где $h(\lambda)$ есть произведение всех длин крюков диаграммы λ.

3. Для каждой симметрической функции $f\in\Lambda$ пусть $D(f)\colon \Lambda\to\Lambda$ — оператор, сопряженный к умножению на f, т. е.

$$\langle D(f)\,u,\ v\rangle=\langle u,\ fv\rangle$$

для всех $u, v\in\Lambda$. Тогда $D\colon \Lambda\to\operatorname{End}(\Lambda)$ является гомоморфизмом колец.

(a) Для каждого разбиения μ обозначим через D_μ оператор $D(s_\mu)$. Тогда поскольку

$$\langle D_\mu s_\lambda, s_\nu\rangle=\langle s_\lambda,\ s_\mu s_\nu\rangle=\langle s_{\lambda/\mu},\ s_\nu\rangle$$

для всех λ, μ, ν, то $D_\mu s_\lambda=s_{\lambda/\mu}$.

Отсюда в силу (5.9)

$$s_\lambda(x, y)=\sum_\mu D_\mu s_\lambda(x)\,s_\mu(y)$$

и, следовательно, для всех $f\in\Lambda$

$$f(x, y)=\sum_\mu D_\mu f(x)\cdot s_\mu(y).$$

(b) $D(h_\lambda)\,m_\mu=0$, за исключением случая, когда $\mu=\lambda\cup\nu$ для некоторого разбиения ν, а в этом случае $D(h_\lambda)\,m_\mu=m_\nu$. В самом деле,

$$\langle D(h_\lambda)\,m_\mu,\ h_\nu\rangle=\langle m_\mu,\ h_\lambda h_\nu\rangle=\langle m_\mu,\ h_{\lambda\cup\nu}\rangle,$$

что равно 0, если не выполняется равенство $\mu=\lambda\cup\nu$.
В частности, $D(h_n)\,m_\mu=0$, если n не есть часть разбиения μ, и $D(h_n)\,m_\mu=m_\nu$, если n — часть μ, где ν — разбиение, получаемое из μ выбрасыванием одной части n. Отсюда вытекает, что для каждой $f(x_0, x_1, x_2, \ldots)\in\Lambda$ функция $(D(h_n)f)(x_1, x_2, \ldots)$ есть коэффициент при x_0^n в f.

(c) Рассмотрим теперь $D(p_n)$. В силу примера 4 § 4 при $N\geqslant n$

$$\langle D(p_n)\,h_N,\ p_\lambda\rangle=\langle h_N,\ p_n p_\lambda\rangle=1=\langle h_{N-n},\ p_\lambda\rangle$$

для всех разбиений λ числа $N-n$. Отсюда $D(p_n)h_N=h_{N-n}$, и, следовательно,

$$D(p_n)=\sum_{r\geqslant 0} h_r\,\partial/\partial h_{n+r},$$

если симметрические функции записаны как многочлены от функций h.

Двойственным образом,

$$D(p_n) = (-1)^{n-1} \sum_{r \geqslant 0} e_r \partial / \partial e_{n+r},$$

если симметрические функции записаны как многочлены от функций e.

Далее, $\langle D(p_n) p_\lambda, p_\mu \rangle = \langle p_\lambda, p_n p_\mu \rangle$, что равно 0 при $\lambda \neq \mu \cup (n)$ и z_λ при $\lambda = \mu \cup (n)$. Отсюда следует, что $D(p_n) p_\lambda = 0$, если n не есть часть разбиения λ, и $D(p_n) p_\lambda = z_\lambda z_\mu^{-1} p_\mu$, если n — часть λ и μ — разбиение, получаемое из λ выбрасыванием одной части n. Из определения z_λ следует, что $z_\lambda z_\mu^{-1} = n \cdot m_n(\lambda)$, где $m_n(\lambda)$ — кратность вхождения n в разбиение λ, и, следовательно, $D(p_n) = n\partial/\partial p_n$, если симметрические функции записаны как многочлены от функций p. В частности, операторы $D(p_n)$ являются дифференцированиями кольца Λ.

Поскольку каждая функция $f \in \Lambda$ представляется в виде многочлена $\varphi(p_1, p_2, \ldots)$ с рациональными коэффициентами, то

$$D(f) = \varphi(\partial/\partial p_1, 2\partial/\partial p_2, \ldots)$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

4. Имеем

$$\sum_\lambda s_\lambda = \prod_i (1 - x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1},$$

где слева сумма берется по всем разбиениям λ.

Достаточно доказать это для конечного числа переменных $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим $\sum_\lambda s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ через $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — теперь это сумма по разбиениям λ длины $\leqslant n$. С помощью индукции по n достаточно показать, что

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)(1 - y)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i y)^{-1}.$$

Из (5.9) следует, что

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum_{\lambda, \mu} y^{|\lambda - \mu|} s_\mu(x_1, \ldots, x_n),$$

где сумма справа берется по всем парам разбиений $\lambda \supset \mu$, таким, что $l(\mu) \leqslant n$ и $\lambda - \mu$ есть горизонтальная полоса. Для каждой такой пары λ, μ определим разбиение $\nu \subset \mu$ равенствами $\mu_i - \nu_i = \lambda_{i+1} - \mu_{i+1}$ ($i \geqslant 1$), так что $|\lambda - \mu| = \lambda_1 - \mu_1 + |\mu - \nu|$. Тогда λ восстанавливается по разбиениям μ, ν и целому числу $\lambda_1 - \mu_1$, откуда

$$(*) \quad \sum_{\lambda, \mu} y^{|\lambda - \mu|} s_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu, \nu} y^{|\mu - \nu|} (1 - y)^{-1} s_\mu(x_1, \ldots, x_n),$$

где сумма справа берется по парам разбиений $\mu \supset \nu$, таким, что $l(\mu) \leqslant n$ и $\mu - \nu$ есть горизонтальная полоса. В силу (5.16) правая часть (*) равна

$$\sum_{\nu, r} y^r (1 - y^{-1}) h_r(x_1, \ldots, x_n) s_\nu(x_1, \ldots, x_n),$$

где суммирование ведется по всем разбиениям ν длины $\leqslant n$ и всем целым $r \geqslant 0$; эта последняя сумма равняется $(1 - y)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i y)^{-1} \times \Phi(x_1, \ldots, x_n)$, что и требуется.

5. (a) Имеет место равенство

$$\sum_{\mu \text{ четно}} s_\mu = \prod_i \left(1 - x_i^2\right)^{-1} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1},$$

где сумма слева берется по всем *четным* разбиениям μ (т. е. все части μ_i четны).

Каждое разбиение λ однозначно приводится к четному разбиению μ удалением вертикальной полосы: возьмем $\mu_i = \lambda_i$ если λ_i четно, и $\mu_i = \lambda_i - 1$, если λ_i нечетно. Из этого наблюдения и (5.17) вытекает, что

$$\left(\sum_{\mu \text{ четно}} s_\mu\right)\left(\sum_{r \geqslant 0} e_r\right) = \sum_\lambda s_\lambda,$$

где сумма справа берется по *всем* разбиениям λ. Поскольку $\sum e_r = \prod (1 + x_i)$, наш результат вытекает теперь из примера 4.

(b) Имеем

$$\sum_{\nu' \text{ четно}} s_\nu = \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1}.$$

Доказательство двойственно к доказательству п. (a): каждое разбиение λ однозначно приводится к разбиению с четными столбцами удалением горизонтальной полосы. Из этого наблюдения и (5.16) следует, что

$$\left(\sum_{\nu' \text{ четно}} s_\nu\right)\left(\sum_{r \geqslant 0} h_r\right) = \sum_\lambda s_\lambda,$$

и так как $\sum_{r \geqslant 0} h_r = \prod (1 - x_i)^{-1}$, доказываемый результат снова вытекает из примера 4.

Тождества из пп. (a) и (b) переходят друг в друга под действием инволюции ω.

6*. Имеет место равенство

$$\sum_\lambda (-1)^{n(\lambda)} s_\lambda = \prod_i (1 - x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1 + x_i x_j)^{-1}.$$

В самом деле,заменяя в примере 5(b) переменные x_i на $\sqrt{-1} \cdot x_i$, мы получим

$$\prod_{i<j} (1 + x_i x_j)^{-1} = \sum_\nu (-1)^{|\nu|/2} s_\nu,$$

где сумма берется по разбиениям ν, у которых все столбцы имеют четную длину. Каждое разбиение λ получается, причем единственным образом, присоединением горизонтальной полосы к некоторому разбиению ν такого вида, откуда вытекает, что

$$\prod_i (1 - x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1 + x_i x_j)^{-1} = \sum_{r \geqslant 0} \sum_\nu (-1)^{|\nu|/2} s_\nu h_r = \sum_\lambda (-1)^{f(\lambda)} s_\lambda,$$

где $f(\lambda) = \sum \left[\dfrac{\lambda_i'}{2}\right]$ (как обычно, $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x). Поскольку $\left[\dfrac{r}{2}\right] \equiv \dbinom{r}{2} \pmod 2$, из (1.6) вытекает, что $f(\lambda) \equiv n(\lambda) \pmod 2$.

7. То же рассуждение, что и в примере 5(b), показывает, что

$$\sum_\lambda t^{c(\lambda)} s_\lambda = \prod_i (1 - t x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1},$$

где сумма берется по всем разбиениям λ, а $c(\lambda)$ — число столбцов нечетной длины в λ. Это тождество включает в себя тождества примеров 4 (при $t=1$) и 5(b) (при $t=0$).

8. Применяя к примеру 7 инволюцию ω, мы получим

$$\sum_{\lambda} t^{r(\lambda)} s_\lambda = \prod_i \frac{1+tx_i}{1-x_i^2} \prod_{i<j} \frac{1}{1-x_ix_j},$$

где сумма берется по всем разбиениям λ, а $r(\lambda)$ есть число строк в λ нечетной длины. При $t=1$ это сводится к примеру 4, а при $t=0$ — к примеру 5(a).

9. Произведения

$$\prod_{i<j}(1-x_ix_j), \quad \prod_i(1-x_i)\prod_{i<j}(1-x_ix_j), \quad \prod_i(1-x_i^2)\prod_{i<j}(1-x_ix_j)$$

(т. е. обратные к произведениям из примеров 4, 5(a), (b) также могут быть разложены в ряды из S-функций. Эти разложения можно вывести из тождества Вейля для систем корней типов D_n, B_n и C_n соответственно. (Если R — система корней с группой Вейля W, системой положительных корней R^+ и полусуммой положительных корней ρ, то тождество Вейля ([6], с. 230) имеет вид

$$(*) \qquad \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w\rho} = \prod_{\alpha\in R^+} \left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right),$$

где $\varepsilon(w)$ — знак элемента $w \in W$, а символы e^{φ} есть формальные экспоненциалы.)

(a) Когда R имеет тип D_n, тождество (*) приводит к тождеству

$$\sum_{\pi} (-1)^{|\pi|/2} s_\pi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(1-x_ix_j),$$

причем сумма берется по всем разбиениям π, имеющим в обозначениях Фробениуса вид $\pi = (\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_p - 1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, где $\alpha_1 \leqslant n-1$.

(b) Когда R имеет тип C_n, мы получаем из (*)

$$\sum_{\rho} (-1)^{|\rho|/2} s_\rho(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i \left(1-x_i^2\right) \prod_{i<j}(1-x_ix_j)$$

— сумма по всем разбиениям $\rho = (\alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, где $\alpha_1 \leqslant n-1$.

(c) Когда R имеет тип B_n, мы получаем из (*)

$$\sum_{\sigma} (-1)^{(|\sigma|+p(\sigma))/2} s_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i (1-x_i) \prod_{i<j}(1-x_ix_j),$$

причем сумма берется по всем самосопряженным разбиениям $\sigma = (\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_p \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, таким, что $\alpha_1 \leqslant n-1$, а $p(\sigma) = p$.

10. На языке λ-колец тождества примеров 5(a), (b) и 9 дают разложения в ряды по S-операциям для $\sigma_t(\sigma^2(x))$, $\sigma_t(\lambda^2(x))$, $\lambda_t(\sigma^2(x))$ и $\lambda_t(\lambda^2(x))$, а именно

$$\sigma_t(\sigma^2(x)) = \sum_{\mu \text{ четно}} S^\mu(x)\, t^{|\mu|/2}, \quad \sigma_t(\lambda^2(x)) = \sum_{\nu' \text{ четно}} S^\nu(x)\, t^{|\nu|/2},$$

$$\lambda_t(\sigma^2(x)) = \sum_{\rho} S^\rho(x)\, t^{|\rho|/2}, \quad \lambda_t(\lambda^2(x)) = \sum_{\pi} S^\pi(x)\, t^{|\pi|/2},$$

где последние две суммы берутся по разбиениям $\rho = (\alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+$ $+1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ и $\pi = (\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_p - 1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.

11. Положим в формуле примера 4 $x_1 = \ldots = x_N = t, x_{N+1} = = x_{N+2} = \ldots = 0$. Тогда $s_\lambda = \binom{N}{\lambda'} t^{|\lambda|}$ (пример 4 § 3), откуда для всех $n \geqslant 0$

$$\sum_{|\lambda|=n} \binom{N}{\lambda} = \text{коэффициент при } t^n \text{ в } (1-t)^{-N} (1-t^2)^{-N(N-1)/2} =$$

$$= \text{коэффициент при } t^n \text{ в } (1-t)^{-N(N+1)/2} (1+t)^{-N(N-1)/2}$$

Поскольку выписанное соотношение верно для всех положительных целых N, это полиномиальное тождество, т. е.

$$\sum_{|\lambda|=n} \binom{X}{\lambda} = \text{коэффициент при } t^n \text{ в } (1-t)^{-X(X+1)/2} (1+t)^{-X(X-1)/2}.$$

12. В тождестве примера 4 положим $x_1 = \ldots = x_N = t/N$, $x_{N+1} = = x_{N+2} = \ldots = 0$, и пусть $N \to \infty$. Тогда мы получаем из примера 11, что

$$\sum_{|\lambda|=n} h(\lambda)^{-1} = \text{коэффициент при } t^n \text{ в } \exp\left(t + \frac{1}{2} t^2\right),$$

где (пример 3 § 4) $h(\lambda)$ есть произведение длин крюков λ. Из примера 2 следует, что общее число стандартных таблиц веса (1^n) равно $n!$, умноженному на коэффициент при t^n в $\exp(t + t^2/2)$. Это число совпадает также с числом таких перестановок $w \in S_n$, что $w^2 = 1$.

13. Пусть λ — разбиение. *Плоским разбиением формы* λ называется отображение π из (диаграммы разбиения) λ в положительные целые числа, такое, что $\pi(x_1) \geqslant \pi(x_2)$, если точка x_2 лежит ниже или правее, чем x_1, в диаграмме λ. Числа $\pi(x)$ называются *частями* плоского разбиения π, а число

$$|\pi| = \sum_{x \in \lambda} \pi(x)$$

называется *весом* π. Каждое плоское разбиение π определяет последовательность $\lambda = \lambda^{(0)} \supset \lambda^{(1)} \supset \ldots$ (обычных) разбиений, такую, что $\pi^{-1}(i) = = \lambda^{(i-1)} - \lambda^{(i)}$ для всех $i \geqslant 1$.

Если $\pi(x_1) > \pi(x_2)$, когда x_2 лежит непосредственно под x_1 (т. е. если части разбиения π строго убывают вдоль каждого столбца), то π называется *строгим по столбцам*. Ясно, что π является строгим по столбцам в том и только в том случае, когда каждая косая диаграмма $\pi^{-1}(i) = = \lambda^{(i-1)} - \lambda^{(i)}$ является горизонтальной полосой.

У плоского разбиения π есть 3-мерная *диаграмма*, состоящая из точек (i, j, k) с целыми координатами, таких, что $(i, j) \in \lambda$ и $1 \leqslant k \leqslant \leqslant \pi(i, j)$. По-другому можно представлять себе диаграмму разбиения π как множество единичных кубов, такое, что над каждым квадратом $x \in \lambda$ вертикально установлено $\pi(x)$ кубов. Как и в случае обычных (линейных) разбиений, мы будем обозначать одним и тем же символом π и плоское разбиение, и его диаграмму.

Если S — произвольное множество плоских разбиений, то его *производящей функцией* назовем многочлен или формальный степенной ряд

$$\sum_{\pi \in S} q^{|\pi|},$$

в котором коэффициент при q^n есть число плоских разбиений веса n, принадлежащих S.

(a) Рассмотрим строгие по столбцам плоские разбиения формы λ, все части которых $\leqslant n$. В силу (5.12) их производящая функция есть $s_\lambda(q^n, q^{n-1}, \ldots, q)$, что, согласно примеру 1 § 3, равно

$$q^{|\lambda|+n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{1-q^{n+c(x)}}{1-q^{h(x)}}.$$

(b) Пусть l, m, n — три положительных целых числа; рассмотрим множество таких плоских разбиений π, что все их части не превосходят n, а форма λ такова, что $l(\lambda) \leqslant l$ и $l(\lambda') \leqslant m$, т. е. это множество трехмерных диаграмм π, помещающихся внутри ящика B с длинами сторон l, m, n. Добавляя к каждой части в i-й строке плоского разбиения π при $1 \leqslant i \leqslant l$ число $l+1-i$, мы превратим π в строгое по столбцам плоское разбиение формы $(m, \ldots, m) = (m^l)$ с наибольшей частью $\leqslant l+n$. Таким образом, производящая функция для плоских разбиений $\pi \subset B$ в силу приведенного выше утверждения (a) равняется

$$\prod_{x \in (m^l)} \frac{1-q^{l+n+c(x)}}{1-q^{h(x)}}. \tag{1}$$

При записи в такой форме не видна ее симметричность как функции от l, m и n, которой она должна обладать. Полученное выражение можно переписать следующим образом: для каждой точки $y = (i, j, k) \in B$ определим ее *высоту* как $\mathrm{ht}(y) = i+j+k-2$ (так что точка (1, 1, 1) имеет высоту 1). Тогда производящую функцию (1) можно записать в виде

$$\sum_{\pi \subset B} q^{|\pi|} = \prod_{y \in B} \frac{1-q^{1+\mathrm{ht}(y)}}{1-q^{\mathrm{ht}(y)}}. \tag{2}$$

(c) Можно теперь разрешить некоторым из чисел l, m, n обращаться в бесконечность. Наиболее поразительный результат получается при стремлении к ∞ всех чисел l, m, n: при этом ящик B заменяется положительным октантом, и для всех $n \geqslant 1$ число точек решетки (i, j, k) с $i+j+k-2=n$ и $i, j, k \geqslant 1$ есть коэффициент при t^{n-1} в $(1-t)^{-3}$, т. е. $n(n+1)/2$. Отсюда следует, что производящая функция для всех плоских разбиений есть

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^{n(n+1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-n}. \tag{3}$$

(d) Аналогично производящая функция для всех плоских разбиений с наибольшей частью $\leqslant m$ — это

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-\min(m, n)}. \tag{4}$$

14. Переходя в примере 13(a) к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что производящая функция для всех строгих по столбцам плоских разбиений формы λ равна

$$q^{|\lambda|+n(\lambda)} H_\lambda(q)^{-1}, \tag{1}$$

где $H_\lambda(q) = \prod_{x \in \lambda} (1-q^{h(x)})$.

Эту производящую функцию можно получить и другим способом. Пусть π — строгое по столбцам плоское разбиение формы λ, и пусть S —

множество пар $(\pi(i,j), j)$, где $(i,j) \in \lambda$. Так как π строгое по столбцам, то все элементы из S различны. Упорядочим S следующим образом: пара (r, j) предшествует (r', j'), если либо $r > r'$, либо $r = r'$ и $j < j'$. Это линейное упорядочение множества S. Определим стандартную таблицу $T(\pi)$ формы λ так: $T(i,j) = k \Leftrightarrow (\pi(i,j), j)$ есть k-й элемент множества S при определенном выше линейном упорядочении. Например, если π — это

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{matrix}$$

то упорядоченное множество S есть

$$(3,1),\ (3,2)\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (1,1),\ (1,4),\ (1,5),$$

а $T(\pi)$ — стандартная таблица

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 \\ 6 \end{matrix}$$

Обратно, пусть T — стандартная таблица формы λ и π — строгое по столбцам плоское разбиение, такое, что $T(\pi) = T$. Пусть $|\lambda| = n$, и пусть при $1 \leqslant k \leqslant n$ число a_k есть часть разбиения π, лежащая в квадрате, который в таблице T занят числом k. Тогда $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$ и

$$a_k > a_{k+1} \quad \text{при} \quad k \in R(T),$$

где $R(T)$ есть множество таких целых $k \in [1, n-1]$, что $k+1$ лежит в таблице T в более низкой строке, чем k. Положим теперь

$$b_k = \begin{cases} a_k - a_{k+1}, & \text{если } k \notin R(T) \text{ и } k \neq n, \\ a_k - a_{k+1} - 1, & \text{если } k \in R(T), \\ a_n - 1, & \text{если } k = n, \end{cases}$$

так что $b_k \geqslant 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n + r(T) + \sum_{k=1}^{n} kb_k,$$

где

$$r(T) = \sum \{k : k+1 \text{ лежит в } T \text{ ниже, чем } k\},$$

и, следовательно, производящая функция для строгих по столбцам плоских разбиений π, таких, что $T(\pi) = T$, равна

$$q^{n+r(T)} \varphi_n(q)^{-1},$$

где, как обычно, $\varphi_n(q) = (1-q) \ldots (1-q^n)$.

Значит, производящая функция для строгих по столбцам плоских разбиений формы λ есть

(2) $$q^n \Big(\sum_T q^{r(T)} \Big) \Big/ \varphi_n(q),$$

где сумма берется по всем стандартным таблицам T формы λ.

Из (1) и (2) вытекает, что

(3) $$\sum_T q^{r(T)} = q^{n(\lambda)} \varphi_n(q) / H_\lambda(q).$$

15. Пусть S — произвольное множество положительных целых чисел. Из (5.12) и примера 4 следует, что производящая функция для строгих

по столбцам плоских разбиений, все части которых принадлежат S, равна

$$\prod_{i \in S} (1-q^i)^{-1} \prod_{\substack{i, j \in S \\ i<j}} (1-q^{i+j})^{-1}.$$

(a) Возьмем в качестве S множество всех положительных целых чисел. Тогда производящая функция для *всех* строгих по столбцам плоских разбиений произвольной формы есть

$$(1) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-[(n+1)/2]}.$$

(b) Возьмем в качестве S множество всех положительных *нечетных* чисел. Мы получим производящую функцию

$$(2) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^{-1} (1-q^{2n})^{-[n/2]}.$$

Но строгие по столбцам плоские разбиения, все части которых нечетны, находятся во взаимно однозначном соответствии с *симметричными* плоскими разбиениями π (т. е. такими, что $\pi(i, j) = \pi(j, i)$). В самом деле, диаграмму симметричного плоского разбиения можно представлять себе как последовательность помещенных друг над другом диаграмм симметричных (линейных) разбиений $\pi^{(1)} \supset \pi^{(2)} \supset \ldots$; каждое $\pi^{(i)}$ имеет в обозначениях Фробениуса вид $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ и, следовательно, определяет линейное разбиение $\sigma^{(i)} = (2\alpha_1 + 1, \ldots, 2\alpha_p + 1)$ с различными нечетными частями — эти $\sigma^{(i)}$ можно принять за столбцы строгого по столбцам плоского разбиения с нечетными частями. Отсюда следует, что (2) есть производящая функция для множества всех симметричных плоских разбиений.

16. Положим $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i (1-x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1}$, как и в примере 4.

Полагая $t = 0$ в тождестве примера 5 § 5 гл. III далее, мы получим

$$(1) \qquad \sum_{m, \lambda} u^m s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\varepsilon \Phi\left(x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}\right) \Big/ \left(1 - u \prod x_i^{(1-\varepsilon_i)/2}\right),$$

где сумма слева берется по всем разбиениям $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ длины $\leqslant n$ и целым $m \geqslant \lambda_1$, а справа — по всем наборам $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$.

Перепишем тождество (1) в обозначениях систем корней. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество векторов

$$R = \{\pm v_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \pm v_i \pm v_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant n)\}$$

есть система корней типа B_n, для которой

$$R^+ = \{v_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \ v_i \pm v_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant n)\}$$

является системой положительных корней, так что полусумма положительных корней — это вектор

$$\rho = \frac{1}{2}\left((2n-1) v_1 + (2n-3) v_2 + \ldots + v_n\right).$$

Подмножество

$$R_0 = \{v_i - v_j : i \neq j\}$$

в R есть подсистема корней в R типа A_{n-1}, а $R_0^+ = R^+ \cap R_0$ — система положительных корней в R_0. Группа Вейля W_0 системы R_0 — это симметрическая группа S_n, действующая перестановками векторов $v_1, \ldots, v_n$, а группа Вейля W системы R — это полупрямое произведение W_0 на группу (порядка 2^n) преобразований w_e: $v_i \longmapsto \varepsilon_i v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где, как и выше, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, а все ε_i равны ± 1. В этих обозначениях

$$\Phi\left(e^{-v_1}, \ldots, e^{-v_n}\right) = \prod_{\alpha \in R_0^+} (1 - e^{-\alpha}) / \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) =$$
$$= \left(\sum_{w \in W_0} \varepsilon(w) e^{w\rho}\right) / \left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho}\right)$$

в силу тождества Вейля (пример 9). Отсюда следует, что правая часть тождества (1) (с заменой x_i на e^{-v_i}) может быть записана как сумма по W; приравнивая коэффициенты при u^m в обеих частях (1), мы приходим к тождеству

$$\text{(2)} \qquad \sum_\lambda s_\lambda\left(e^{-v_1}, \ldots, e^{-v_n}\right) = e^{-m\theta} J(m\theta + \rho)/J(\rho),$$

где $\theta = (v_1 + \ldots + v_n)/2$ и для всех векторов v

$$J(v) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{wv},$$

а сумма в левой части (2) берется по всем разбиениям λ, таким, что $l(\lambda) \leqslant n$ и $l(\lambda') \leqslant m$ (т. е. таким, что $\lambda \subset (m^n)$).

(При желании правую часть тождества (2) можно записать в виде отношения определителей:

$$\text{(2}'\text{)} \qquad \sum_\lambda s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = D_m / D_0,$$

где $D_m = \det\left(x_j^{m+2n-i} - x_j^{i-1}\right)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$, а суммирование, как и выше, ведется по разбиениям $\lambda \subset (m^n)$.)

Это тождество (2) является полиномиальным тождеством от n независимых переменных e^{-v_i}. Заменяя каждое e^{-v_i} на q^{f_i}, где f_i — произвольные целые числа, мы можем, таким образом, специализировать его для получения тождеств от одного переменного q. Это означает, что каждый экспоненциал e^{-v} заменяется на $q^{\langle v, f\rangle}$, где $f = \sum f_i v_i$, а $\langle v, f\rangle$ есть стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$. Таким способом мы получаем тождество

$$\text{(3)} \qquad \sum_\lambda s_\lambda\left(q^{f_1}, \ldots, q^{f_n}\right) = q^{m\langle\theta, f\rangle} \frac{\sum \varepsilon(w)\, q^{-\langle m\theta+\rho,\, wf\rangle}}{\sum \varepsilon(w)\, q^{-\langle\rho,\, wf\rangle}},$$

где сумма слева берется по разбиениям $\lambda \subset (m^n)$.

17. Возьмем в формуле (3) примера 16 $f = 2\rho$ (сумма положительных корней в R), так что $f_i = 2n - 2i + 1$. Знакопеременная сумма

$$\sum \varepsilon(w)\, q^{-\langle m\theta+\rho,\, 2w\rho\rangle}$$

в правой части равна в силу тождества Вейля (пример 9) произведению

$$\prod_{\alpha \in R^+} \left(q^{-\langle m\theta+\rho,\, \alpha\rangle} - q^{\langle m\theta+\rho,\, \alpha\rangle}\right),$$

и, следовательно, правая часть (3) равняется

$$\prod_{\alpha\in R^+}\frac{q^{(2m\theta+2\rho,\,\alpha)}-1}{q^{(2\rho,\,\alpha)}-1}$$

Положительные корни v_i-v_j $(i<j)$ не вносят вклад в это произведение, поскольку они ортогональны вектору $\theta=\left(\sum v_i\right)/2$. Значит, мы получаем тождество

$$\sum_{\lambda\subset(m^n)} s_\lambda(q^{2n-1},\ q^{2n-3},\ \ldots,\ q)= \tag{4}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{q^{m+2i-1}-1}{q^{2i-1}-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{q^{2(m+i+j-1)}-1}{q^{2(i+j-1)}-1}.$$

Левая часть (4) есть производящая функция для строгих по столбцам плоских разбиений с нечетными частями $\leqslant 2n-1$, имеющих не более m столбцов и не более n строк; эквивалентным образом (пример 15), это производящая функция для *симметричных* плоских разбиений π, диаграммы которых содержатся в ящике $B=B_{(n,\,n,\,m)}=\{(i,j,k)\colon 1\leqslant i,j\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m\}$.

Правую часть (4) можно следующим образом переписать в виде, аналогичном формуле (2) примера 13. Пусть G_2 — группа из двух элементов, состоящая из единичного элемента и отображения $(i,j,k)\mapsto(j,i,k)$, так что ящик B устойчив относительно G_2. Для каждой орбиты η группы G_2 в B пусть $|\eta|$ $(=1$ или $2)$ — число ее элементов, и положим

$$\mathrm{ht}(\eta)=\sum_{y\in\eta}\mathrm{ht}(y),$$

где, как и в примере 13, $\mathrm{ht}(i,j,k)=i+j+k-2$. Тогда производящая функция для симметричных плоских разбиений $\pi\subset B$ есть

$$\prod_{\eta\in B/G_2}\frac{1-q^{\mathrm{ht}(\eta)+|\eta|}}{1-q^{\mathrm{ht}(\eta)}}. \tag{5}$$

18. Пусть G_3 — группа из трех элементов, порожденная отображением $(i,j,k)\mapsto(j,k,i)$, и пусть C_n — куб $\{(i,j,k)\colon\ 1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$. Формула (5) примера 17 подсказывает следующую гипотезу: производящая функция для *циклически симметричных* плоских разбиений π (т. е. таких, диаграммы которых устойчивы относительно G_3), содержащихся в кубе C_n, должна равняться

$$\prod_{\eta\in C_n/G_3}\frac{1-q^{\mathrm{ht}(\eta)+|\eta|}}{1-q^{\mathrm{ht}(\eta)}}. \tag{6}$$

Это было проверено численно при $n\leqslant 10$ (Дж. Маккэй) и недавно доказано для произвольных n и $q=1$ Эндрюсом [4] [1]).

*Обозначим через G_6 группу всех перестановок координат (i,j,k) и назовем плоские разбиения, диаграммы которых устойчивы относительно G_6, *вполне симметричными.* Очевидный аналог формул (5) и (6) для груп-

[1]) Гипотеза доказана в работе [16°]. — *Прим. перев.*

пы G_6 тривиальным образом *ложен*, поскольку рациональная функция

$$\prod_{\eta \in C_n/G_6} \frac{1 - q^{\mathrm{ht}(\eta) + |\eta|}}{1 - q^{\mathrm{ht}(\eta)}}$$

при $n \geqslant 3$ не является многочленом. Кажется правдоподобным, однако, что число вполне симметричных плоских разбиений, все части которых не превосходят n, получается, если положить в этом выражении $q = 1$, т. е. равняется

$$\prod_{\eta \in C_n/G_6} \frac{\mathrm{ht}(\eta) + |\eta|}{\mathrm{ht}(\eta)}$$

Во всяком случае, это так при $n \leqslant 10$ (Эндрюс) *.

19. В обозначениях примера 16 множество векторов

$$R_1 = \{\pm 2v_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \ \pm v_i \pm v_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant n)\}$$

есть система корней типа C_n, для которой

$$R_1^+ = \{2v_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \ v_i \pm v_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant n)\}$$

— система положительных корней, так что полусумма положительных корней — это вектор

$$\rho_1 = nv_1 + (n-1)v_2 + \ldots + v_n.$$

Соответствующей группой Вейля является та же группа W, что и в примере 16.

Возьмем $f = \rho_1$ в формуле (3) примера 16, так что e^{-v_i} заменится на q^{n-i+1}. Как и в примере 17, мы получаем с помощью тождества Вейля, что

$$\sum \varepsilon(w) q^{-\langle m\theta + \rho, w\rho_1 \rangle} = \prod_{\alpha \in R_1^+} \left(q^{-\langle m\theta+\rho, \alpha/2\rangle} - q^{\langle m\theta+\rho, \alpha/2\rangle}\right),$$

и, следовательно, правая часть (3) равняется

$$\prod_{\alpha \in R_1^+} \frac{q^{\langle m\theta+\rho, \alpha\rangle} - 1}{q^{\langle \rho, \alpha\rangle} - 1}.$$

Корни $v_i - v_j$ $(i < j)$ снова не дают вклада в это произведение, откуда

$$(7) \qquad \sum_{\lambda \subset (m^n)} s_\lambda(q^n, \ldots, q) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{q^{m+i+j-1} - 1}{q^{i+j-1} - 1}.$$

Левая часть (7) есть производящая функция для строгих по столбцам плоских разбиений с наибольшей частью $\leqslant n$, имеющих не более m столбцов, а правую часть можно записать в терминах функции высоты, введенной в примере 13, а именно как

$$\prod_{y \in D} \frac{1 - q^{\mathrm{ht}(y)+1}}{1 - q^{\mathrm{ht}(y)}},$$

где D есть призма $\{(i, j, k): 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m\}$.

20°. Пусть θ_1 и θ_2 — косые диаграммы, и пусть x_1 — самая правая точка в верхней строке θ_1, а x_2 — самая левая точка в нижней строке θ_2. Обо-

значим через θ_2^v (соответственно θ_2^h) диаграмму, получающуюся из θ_2 таким сдвигом, что точка x_2 переходит в точку, лежащую непосредственно над x_1 (соответственно непосредственно справа от x_1). Тогда

(1) $$s_{\theta_1} s_{\theta_2} = s_{\theta_1 \cup \theta_2^v} + s_{\theta_1 \cup \theta_2^h}.$$

В самом деле, в силу (5.12)

$$s_{\theta_1} s_{\theta_2} = \sum_{T_1, T_2} x^{T_1} x^{T_2},$$

где сумма берется по парам таблиц T_1, T_2 форм θ_1 и θ_2 соответственно. Разобьем эти пары таблиц на два подмножества — те, для которых $T_2(x_2) < T_1(x_1)$, и те, для которых $T_2(x_2) \geqslant T_1(x_1)$. Сдвигая таблицу T_2, мы получаем взаимно однозначное соответствие между первым (соответственно вторым) из этих подмножеств и множеством всех таблиц формы $\theta_1 \cup \theta_2^v$ (соответственно $\theta_1 \cup \theta_2^h$), что и приводит к (1).

Вспоминая (5.7), мы видим, что повторное применение (1) приводит к разложению произвольной косой S-функции в сумму косых S-функций, отвечающих связным диаграммам.

В частности, мы получаем, что

(2) $$h_1^n = \sum_{\theta} s_{\theta},$$

где сумма берется по 2^{n-1} различным косым n-крюкам θ. Беря в обеих частях (2) коэффициент при $x_1 \ldots x_n$ (или, что эквивалентно, скалярное произведение с h_1^n), мы видим, что это разложение описывает разложение симметрической группы S_n на подмножества перестановок w с фиксированным множеством точек подъема $S = \{i:\ 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ w(i) < w(i+1)\}$.

21°. Из (5.12) легко вытекает, что если θ_1 и θ_2 — косые диаграммы, получающиеся друг из друга центральной симметрией относительно некоторой точки, то $s_{\theta_1} = s_{\theta_2}$.

22°. Будем отождествлять элементы кольца $\Lambda \otimes_Z \Lambda$ с функциями от двух наборов переменных (x) и (y), сопоставляя элементу $f \otimes g$ функцию $f(x)g(y)$. Ясно, что для каждой $f \in \Lambda$ функция $f(x, y)$ лежит в $\Lambda \otimes_Z \Lambda$; определим *диагональное отображение* (или *коумножение* Δ: $\Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ формулой $(\Delta f)(x, y) = f(x, y)$. *Коединица* ε: $\Lambda \to Z$ определяется как Z-линейное отображение, равное 0 на $\bigoplus_{n>0} \Lambda^n$ и такое, что $\varepsilon(1) = 1$.

Легко проверить, что так введенные коумножение и коединица превращают Λ в кокоммутативную алгебру Хопфа над Z (определение алгебры Хопфа см., например, в [22°]; важнейшая из аксиом состоит в том, что коумножение Δ: $\Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ есть гомоморфизм колец).

(a) Из определений сразу вытекает, что

$$\Delta h_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} h_k \otimes h_{n-k}, \quad \Delta e_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} e_k \otimes e_{n-k},$$
$$\Delta p_n = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n \qquad (n \geqslant 1).$$

Последнее равенство означает, что элементы p_n *примитивны*.

(b) В силу (5.9)

$$\Delta s_{\lambda} = \sum_{\mu} s_{\lambda/\mu} \otimes s_{\mu}$$

для всех разбиений λ.

(c) Снабдим $\Lambda\otimes\Lambda$ естественным скалярным произведением, относительно которого $\langle f_1\otimes g_1,\ f_2\oplus g_2\rangle = \langle f_1,\ f_2\rangle\langle g_1,\ g_2\rangle$ для всех $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2\in\Lambda$. Тогда коумножение $\Delta\colon\ \Lambda\to\Lambda\otimes\Lambda$ сопряжено умножению $\Lambda\otimes\Lambda\to\Lambda$ относительно введенных скалярных произведений, т. е.

$$\langle\Delta f,\ g\otimes h\rangle=\langle f,\ gh\rangle$$

для всех $f,\ g,\ h\in\Lambda$. В самом деле, достаточно проверить, что $\langle\Delta s_\lambda,\ s_\mu\otimes\otimes s_\nu\rangle=\langle s_\lambda,\ s_\mu s_\nu\rangle$ для всех разбиений λ, μ и ν, а это сразу следует из (b), (5.1) и (4.8). Очевидно также, что коединица $\varepsilon\colon\ \Lambda\to Z$ сопряжена естественному вложению $e\colon\ Z\to\Lambda$ относительно скалярного произведения на Z, такого, что $\langle 1,1\rangle=1$.

Эти утверждения означают, что алгебра Хопфа Λ *самодвойственна*.

(d) Из (c) легко следует, что если $f\in\Lambda$ и $\Delta f=\sum\limits_i a_i\otimes b_i$, то

$$D(f)(gh)=\sum_i (D(a_i)\,g)\cdot(D(b_i)\,h)$$

для всех $g,\ h\in\Lambda$ (см. пример 3).

(e) В силу (c) при $n>0$ элемент $p\in\Lambda^n$ примитивен тогда и только тогда, когда он ортогонален всем элементам вида fg, где f и g — однородные симметрические функции положительной степени. В частности,

$$\langle p_n,\ h_\lambda\rangle=\langle p_n,\ e_\lambda\rangle=0$$

при $l(\lambda)>1$. Поскольку $\langle p_n,\ h_n\rangle=1$ (пример 4 § 4), а элементы h_λ $(|\lambda|=n)$ образуют Z-базис в Λ^n, мы видим, что любой примитивный элемент $p\in\Lambda^n$ пропорционален p_n. Иными словами, элементы p_n $(n>0)$ образуют Z-базис в пространстве примитивных элементов из Λ.

(f) Из (a) и (2.6′) следует, что отображение $\tilde\omega\colon\ \Lambda\to\Lambda$, которое на Λ^n равно $(-1)^n\omega$, есть *антиподальное отображение* (или *сопряжение*) в алгебре Хопфа Λ (см., например, [22°]).

23°. Имеют место следующие обобщения формул (4.3) и (4.3′): для любых двух разбиений λ и μ

$$\text{(1)}\qquad \sum_\rho s_{\rho/\lambda}(x)\,s_{\rho/\mu}(y)=\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}\sum_\tau s_{\mu/\tau}(x)\,s_{\lambda/\tau}(y);$$

$$\text{(2)}\qquad \sum_\rho s_{\rho/\lambda'}(x)\,s_{\rho'/\mu}(y)=\prod_{i,j}(1+x_iy_j)\cdot\sum_\tau s_{\mu'/\tau}(x)\,s_{\lambda/\tau'}(y).$$

Применяя к симметрическим функциям от переменных x_i инволюцию ω, мы видим, что (2) вытекает из (1), так что достаточно установить (1). Положим $P(x,\ y)=\prod\limits_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$. Пусть (x), (y), (z) и (u) — четыре набора независимых переменных. Разложим произведение

$$P=P(x,\ y)\,P(x,\ u)\,P(z,\ y)\,P(z,\ u)$$

в ряд двумя разными способами.

Прежде всего, в силу (4.3) и (5.9)

$$\text{(a)}\qquad P=\sum_\rho s_\rho(x,\ z)\,s_\rho(y,\ u)=\sum_{\rho,\lambda,\mu} s_{\rho/\lambda}(x)\,s_{\rho/\mu}(y)\,s_\lambda(z)\,s_\mu(u).$$

С другой стороны, используя (4.3) и (5.3), мы видим, что

(b) $$P = P(x, y) \sum_{\sigma, \nu, \tau} s_\sigma(x) s_\sigma(u) s_\nu(y) s_\nu(z) s_\tau(z) s_\tau(u) =$$
$$= P(x, y) \sum_{\sigma, \nu, \tau, \lambda, \mu} c^{\mu}_{\sigma\tau} s_\sigma(x) c^{\lambda}_{\nu\tau} s_\nu(y) s_\lambda(z) s_\mu(u) =$$
$$= P(x, y) \sum_{\tau, \lambda, \mu} s_{\mu/\tau}(x) s_{\lambda/\tau}(y) s_\lambda(z) s_\mu(u).$$

Сравнивая коэффициенты при $s_\lambda(z) s_\mu(u)$ в (a) и (b), получаем формулу (1).

Имея в виду пример 22, можно сказать, что формула (1) получается из (4.3) путем применения диагонального отображения.

24°. Применяя те же рассуждения, что и в примере 23°, к тождествам примеров 4 и 5, мы получаем более общие тождества

(3) $$\sum_{\rho} s_{\rho/\lambda} = \prod_i (1 - x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} \sum_\tau s_{\lambda/\tau},$$

(4) $$\sum_{\rho \text{ четно}} s_{\rho/\lambda} = \prod_i (1 - x_i^2)^{-1} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} \sum_{\tau \text{ четно}} s_{\lambda/\tau},$$

(5) $$\sum_{\rho' \text{ четно}} s_{\rho/\lambda} = \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} \sum_{\tau' \text{ четно}} s_{\lambda/\tau}$$

для всех разбиений λ.

25*. (a) $$\sum_{\rho, \lambda} q^{|\rho|} s_{\rho/\lambda}(x) s_{\rho/\lambda}(y) = \prod_{i \geqslant 1} \left((1 - q^i)^{-1} \prod_{j, k} (1 - q^i x_j y_k)^{-1} \right).$$

(b) $$\sum_{\rho, \lambda} q^{|\rho|} s_{\rho'/\lambda}(x) s_{\rho/\lambda'}(y) = \prod_{i \geqslant 1} \left((1 - q^i)^{-1} \prod_{j, k} (1 + q^i x_j y_k) \right).$$

(c) $$\sum_{\rho, \lambda} q^{|\rho|} s_{\rho/\lambda}(x) s_{\rho'/\lambda}(y) = \prod_{i \geqslant 1} \left((1 + q^{2i-1}) \prod_{j, k} \frac{1 + q^{2i-1} x_j y_k}{1 - q^{2i} x_j y_k} \right).$$

[Обозначим левую часть (a) через $F(x, y)$. Тогда из примера 23 вытекает, что $F(x, y) = \prod_{j, k} (1 - q x_j y_k)^{-1} F(qx, y)$, а значит, $F(x, y) = \prod_{i \geqslant 1} \prod_{j, k} (1 - q^i x_j y_k)^{-1} F(0, y)$. Но $F(0, y) = \sum_{\rho, \lambda} q^{|\rho|} s_{\rho/\lambda}(0) s_{\rho/\lambda}(y) = \sum_\rho q^{|\rho|} = \prod_{i \geqslant 1} (1 - q^i)^{-1}$, откуда вытекает наш результат.

Тождество (b) получается из (a) применением инволюции ω к симметрическим функциям от переменных x.

Обозначим через $G(x, y)$ левую часть тождества (c). Снова используя пример 23, мы получаем

$$G(x, y) = \prod_{j, k} (1 + q x_j y_k) \, \omega_y(G(qx, y)),$$

где ω_y — это инволюция ω, действующая на симметрические функции от переменных y; отсюда следует, что

$$G(x, y) = \prod_{j, k} \frac{1 + q x_j y_k}{1 - q^2 x_j y_k} G(q^2 x, y).$$

Теперь доказательство завершается так же, как в п. (a).]

26*. (а) Пусть p — целое число $\geqslant 2$, и пусть $\varphi_p\colon \Lambda \to \Delta$ — это гомоморфизм колец, определяемый формулой

$$\varphi_p(h_n) = \begin{cases} h_{n/p}, & \text{если } p \text{ делит } n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть λ — некоторое разбиение, и пусть $\lambda^* = (\lambda^{(r)})_{0 \leqslant r \leqslant p-1}$ есть p-частное разбиения λ (пример 6 § 1). Если $\lambda \supset \mu$, то $\lambda^{(r)} \supset \mu^{(r)}$ при всех r, так что корректно определена функция $s_{\lambda^*/\mu^*} = \prod_{r=0}^{p-1} s_{\lambda^{(r)}/\mu^{(r)}}$. Покажите, что

$$\varphi_p(s_{\lambda/\mu}) = \begin{cases} \sigma_p(\lambda/\mu)\, s_{\lambda^*/\mu^*}, & \text{если } \lambda \underset{p}{\sim} \mu, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\sigma_p(\lambda/\mu) = \pm 1$.

[Пусть $\xi = \lambda + \delta$, $\eta = \mu + \delta$, так что (5.4) $s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\xi_i - \eta_j}\right)$. Для каждого $r = 0, 1, \ldots, p-1$ пусть A_r (соответственно B_r) — это множество индексов i, таких, что $\xi_i \equiv r \pmod p$ (соответственно $\eta_i \equiv r \pmod p$). Тогда $\varphi_p(s_{\lambda/\mu})$ равняется $\pm \det M$, где матрица M — диагональная сумма (не обязательно квадратных) матриц $M_r = \left(h_{(\xi_i \eta_j)/p}\right)_{(i,j) \in A_r \times B_r}$. Отсюда следует, что $\varphi_p(s_{\lambda/\mu}) = 0$, за исключением случая, когда $|A_r| = |B_r|$ при всех r, т. е. когда $\lambda \underset{p}{\sim} \mu$. Если же это условие выполняется, то

$$\varphi_p(s_{\lambda/\mu}) = \pm \prod_{r=0}^{p-1} \det M_r = \pm s_{\lambda^*/\mu^*}.]$$

(b) Пусть $\omega = e^{2\pi i/p}$. Выведите из (а), что

$$s_{\lambda/\mu}(1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}) = \begin{cases} \sigma_p(\lambda/\mu), & \text{если } \lambda \underset{p}{\approx} \mu, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где обозначение $\lambda \underset{p}{\approx} \mu$ означает, что λ, μ имеют одну и ту же p-сердцевину и разность $\lambda^* - \mu^*$ является горизонтальной полосой.

27*. Кольцо Λ_n «симметрических функций от n переменных» есть образ кольца Λ под действием гомоморфизма ρ_n (§ 2), переводящего формальный степенной ряд $E(t) = \sum_{r \geqslant 0} e_r t^r$ в многочлен $\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t)$ степени n. Более общим образом, мы можем выбрать в качестве специализации $E(t)$ *рациональную* функцию от t, скажем,

$$\prod_{i=1}^{k} (1 + x_i t) \prod_{j=1}^{l} (1 - y_j t)^{-1}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, \ldots, y_l)$ — две последовательности независимых переменных. (На языке λ-колец (2.15) это означает, что мы рассматриваем разность $x - y$, где x имеет ранг k, а y — ранг l.)

Для каждого разбиения λ обозначим через $s_\lambda(x, \bar{y})$ образ функции s_λ под действием этой специализации, так что $s_\lambda(x, \bar{y}) = \omega_y(s_\lambda(x, y))$, где ω_y — это инволюция ω, действующая на симметрические функции от переменных y. Значит ((5.9), (5.6)),

$$s_\lambda(x, \bar{y}) = \sum s_\mu(x)\, s_{\lambda'/\mu'}(y) = \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x)\, s_{\nu'}(y). \tag{2}$$

Отсюда следует, что

(3) $$s_{\lambda'}(x, \bar{y}) = s_\lambda(y, \bar{x}).$$

(a) Обозначим через $\Gamma_{k,l}$ множество точек решетки $(i, j) \in Z^2$, таких, что $i, j \geqslant 1$ и либо $i \leqslant k$, либо $j \leqslant l$ (либо выполняются оба неравенства). Тогда $s_\lambda(x, \bar{y}) \neq 0$ в том и только в том случае, если диаграмма разбиения λ содержится в $\Gamma_{k,l}$.

В самом деле, в силу (2) и (5.8) $s_\lambda(x, \bar{y}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда найдется разбиение $\mu \subset \lambda$, такое, что $l(\mu) \leqslant k$ и $\lambda_i - \mu_i \leqslant l$ для всех $i \geqslant 1$, а это условие эквивалентно тому, что $\lambda \subset \Gamma_{k,l}$.

(b) Назовем *битаблицей* T типа (k, l) и формы $\lambda - \mu$ (где $\lambda \supset \mu$) последовательность разбиений $\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(k+l)} = \lambda$, такую, что косые диаграммы $\theta^{(i)} = \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ являются горизонтальными полосами при $1 \leqslant i \leqslant k$ и являются вертикальными полосами при $k+1 \leqslant i \leqslant k+l$. Графически T можно изобразить, заполняя каждый квадрат диаграммы $\theta^{(i)}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ символом i, а каждый квадрат диаграммы $\theta^{(k+j)}$ при $1 \leqslant j \leqslant l$ символом $\bar{j}$. Тогда в каждой строке и столбце символы $1, \ldots, k$ предшествуют символом $\bar{1}, \ldots, \bar{l}$; символы i должны возрастать при чтении сверху вниз в каждом столбце и не убывать при чтении слева направо в каждой строке, а символы $\bar{j}$ должны возрастать по строкам и не убывать по столбцам.

Свяжем с каждой такой битаблицей одночлен

$$(x, \bar{y})^T = \prod_{i=1}^{k} x_i^{|\theta^{(i)}|} \prod_{j=1}^{l} y_j^{|\theta^{(k+j)}|};$$

тогда справедливо равенство

(4) $$s_{\lambda/\mu}(x, \bar{y}) = \sum_T (x, \bar{y})^T,$$

где сумма берется по всем битаблицам T типа (k, l) и формы $\lambda - \mu$.

До конца этого примера λ будет таким разбиением, что $(l^k) \subset \lambda \subset \Gamma_{k,l}$.

(c) Если $m \leqslant \lambda_k - l$, то обозначим через $\nu = \lambda - (m^k)$ разбиение $(\lambda_1 - m, \ldots, \lambda_k - m, \lambda_{k+1}, \ldots)$. Тогда $s_\lambda(x, \bar{y}) = (x_1 \ldots x_k)^m s_\nu(x, \bar{y})$. В самом деле, все разбиения μ, встречающиеся в (2), должны удовлетворять условиям $\mu_i \geqslant \lambda_i - l \geqslant \lambda_k - l \geqslant m$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, а значит, $s_\mu(x) = (x_1 \ldots x_k)^m s_{\mu-(m^k)}(x)$.

(d) Пусть λ — такое, как выше; положим $\mu = (\lambda_1 - l, \ldots, \lambda_k - l)$, $\nu = (\lambda'_1 - k, \ldots, \lambda'_l - k)$. Тогда

$$s_\lambda(x, \bar{y}) = s_\mu(x) s_\nu(y) P(x, y),$$

где $P(x, y) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} (x_i + y_j)$.

(i) Пусть (i, j) — пара индексов, такая, что $1 \leqslant i \leqslant k$ и $1 \leqslant j \leqslant l$. Если положить $x_i = -y_j$, то рациональная функция (1) будет иметь числитель степени $k-1$ и знаменатель степени $l-1$; поскольку $\lambda \not\subset \Gamma_{k-1, l-1}$, то из (a) вытекает, что функция $s_\lambda(x, \bar{y})$ обращается в нуль при $x_i = -y_j$. Таким образом, $s_\lambda(x, \bar{y})$ делится на $x_i + y_j$ в кольце $Z[x, y]$, а значит, и на произведение $P(x, y)$.

(ii) Предположим теперь, что $\lambda_k \geqslant 2l$. Тогда в сумме (2) каждое разбиение μ удовлетворяет условию $\mu_k \geqslant \lambda_k - l \geqslant l$, откуда вытекает, что ν является связной компонентой диаграммы $\lambda' - \mu'$, а значит (5.7), что

$s_\nu(y)$ является множителем в $s_{\lambda'/\mu'}(y)$. Следовательно, в этом случае $s_\nu(y)$ есть множитель в $s_\lambda(x, \bar{y})$.

(iii) Из (ii) вытекает, что $s_\nu(y)$ делит $s_{\lambda+(l^k)}(x, \bar{y})$, а последнее в силу п. (с) равно $(x_1 \ldots x_k)^l s_\lambda(x, \bar{y})$. Поэтому $s_\nu(y)$ делит $s_\lambda(x, \bar{y})$; аналогично (или в силу (3)) $s_\mu(x)$ также делит $s_\lambda(x, \bar{y})$. Поскольку три сомножителя $s_\mu(x)$, $s_\nu(y)$ и $P(x, y)$ взаимно просты, то $s_\lambda(x, \bar{y})$ делится на их произведение, которое имеет полную степень $|\mu| + |\nu| + kl = |\lambda|$. Таким образом, остается лишь скалярный множитель; сравнивая коэффициенты при подходящем одночлене в обеих частях нашего равенства, легко видеть, что он равен 1.

(е) Число битаблиц типа (k, l) и формы λ (такой как выше) равно

$$2^{kl} \prod_{x \in \mu} \frac{k + c(x)}{h(x)} \prod_{y \in \nu'} \frac{l - c(y)}{h(y)}.$$

Замечания и библиографические указания

Пример 2. Тот факт, что число стандартных таблиц формы λ равно $n!/h(\lambda)$, принадлежит Фрейму, Робинсону и Троллу [11]. По-видимому, до сих пор неизвестно его простое непосредственное комбинаторное доказательство [1]).

Пример 3. Операторы $D(e_n)$ и $D(h_n)$ были введены Хэммондом [18], а операторы $D(s_\lambda)$ — Фулксом [9]; в обоих случаях они определялись как дифференциальные операторы. См. также [10].

Пример 4. Это тождество обычно приписывают Литтлвуду [29], с. 238; однако оно было сформулировано в эквивалентной форме Шуром в 1918 г. (Ges. Abhandlungen, т. 3, с. 456). Бендер и Кнут нашли элегантное комбинаторное доказательство, использующее свойства соответствия Кнута (оно воспроизведено в [51], с. 177).

Примеры 5, 6, 9. Все эти тождества принадлежат Литтлвуду (цит. выше). Наблюдение, что тождества примера 9 естественно вытекают из тождества Вейля для классических систем корней, является, как мне кажется, новым.

Примеры 13, 14, 15. Плоские разбиения впервые исследовались Мак-Магоном [35], и производящие функции (1), (3) и (4) примера 13 были впервые получены им, но доказательства были другими. Идея приложения S-функций к этим проблемам принадлежит Стенли [51], который дает больше подробностей и ссылок.

Примеры 16, 17. Результаты этих примеров являются новыми. Мак-Магон в [35] выписал в качестве гипотезы формулу производящей функции для симметричных плоских разбиений (формула (4) примера 17), но не смог ее доказать.

---

[1]) Такое доказательство дано в работе [6°]; там же можно найти ссылки на другие недавние доказательства этого замечательного факта. — *Прим. перев.*

Лишь недавно эта гипотеза была доказана Эндрюсом [3]. Его доказательство сильно отличается от приведенного здесь.

Пример 19. Производящая функция (7) была найдена Гордоном, который не опубликовал своего доказательства (см. Стенли, цит. выше, с. 265). Оно также было недавно проведено Эндрюсом [3].

°Результаты примеров 20° и 21° взяты из [23°], где подробно обсуждается их комбинаторный смысл.

Пример 22°. Структура алгебры Хопфа в Λ подробно обсуждается в [7°]. В [22°] показано, что вся теория симметрических функций может быть систематически развита на основе этой структуры.

Примеры 23°, 24°. Тождества этих примеров, по-видимому, являются новыми. Они подсказаны работой [20°], где тождество (1) приведено в частном случае $\lambda = \mu$°.

Пример 27* принадлежит Береле и Регеву [31*][1]).

6. Матрицы перехода

В этом разделе мы будем иметь дело с матрицами, строки и столбцы которых параметризованы разбиениями целого положительного числа n. Мы будем располагать разбиения числа n в обратном лексикографическом порядке (§ 1), так что первым идет разбиение (n), а последним — разбиение (1^n). Из (1.10) следует, что если $\lambda \geqslant \mu$, то λ идет перед μ (обратное неверно). Будем называть матрицу $(M_{\lambda\mu})$, параметризованную разбиениями числа n, *строго верхней треугольной*, если $M_{\lambda\mu} = 0$, за исключением случая, когда $\lambda \geqslant \mu$, и *строго верхней унитреугольной*, если, кроме того, $M_{\lambda\lambda} = 1$ для всех λ. Аналогично определяются *строго нижние треугольные* и *строго нижние унитреугольные* матрицы.

Обозначим через U_n (соответственно U'_n) множество целочисленных строго верхних (соответственно нижних) унитреугольных матриц, параметризованных разбиениями числа n.

(6.1) *Множества U_n и U'_n являются группами (относительно матричного умножения).*

Доказательство. Пусть $M, N \in U_n$. Тогда матричный элемент $(MN)_{\lambda\mu} = \sum\limits_{\nu} M_{\lambda\nu} N_{\nu\mu}$ обращается в 0, если не существует разбиения ν, такого, что $\lambda \geqslant \nu \geqslant \mu$, т. е. если неверно, что $\lambda \geqslant \mu$. По той же причине $(MN)_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda} N_{\lambda\lambda} = 1$. Отсюда $MN \in U_n$.

---

[1]) Очень близкие результаты ранее получены А. М. Вершиком и С. В. Керовым [24°], [25°], [36*]; см. также [29°], [30°]. — *Прим. перев.*

Пусть теперь $M \in U_n$. Система уравнений

(1) $$\sum_\mu M_{\lambda\mu} x_\mu = y_\lambda$$

эквивалентна системе

(2) $$\sum_\mu (M^{-1})_{\lambda\mu} y_\mu = x_\lambda.$$

При фиксированном λ в уравнения (1), относящиеся к y_ν, где $\nu \leqslant \lambda$, входят только те x_μ, для которых $\mu \leqslant \nu$, а значит, $\mu \leqslant \lambda$. Отсюда следует, что то же самое верно для уравнений (2), следовательно, $(M^{-1})_{\lambda\mu} = 0$, за исключением случая, когда $\mu \leqslant \lambda$. Таким образом, $M^{-1} \in U_n$. ∎

Обозначим через J матрицу сопряжения:

$$J_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda' = \mu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(6.2) *Матрица M является строго верхней треугольной (соответственно унитреугольной) тогда и только тогда, когда JMJ строго нижняя треугольная (соответственно унитреугольная).*

Доказательство. Если $N = JMJ$, то $N_{\lambda\mu} = M_{\lambda'\mu'}$. В силу (1.11) $\lambda' \geqslant \mu'$ тогда и только тогда, когда $\mu \geqslant \lambda$, откуда следует наш результат. ∎

Для каждых двух $\mathbb{Z}$-базисов (u_λ) и (v_λ) в Λ^n, параметризованных разбиениями числа n, обозначим через $M(u, v)$ матрицу $(M_{\lambda\mu})$ коэффициентов в уравнениях

$$u_\lambda = \sum_\mu M_{\lambda\mu} v_\mu;$$

$M(u, v)$ называется *матрицей перехода* от базиса (u_λ) к базису (v_λ). Это целочисленная невырожденная матрица.

(6.3) *Пусть (u_λ), (v_λ) и (w_λ) три $\mathbb{Z}$-базиса в Λ^n. Тогда*

(1) $$M(u, v)\, M(v, w) = M(u, w),$$

(2) $$M(v, u) = M(u, v)^{-1}.$$

Пусть (u'_λ) и (v'_λ) — базисы, двойственные к (u_λ) и (v_λ) соответственно (относительно скалярного произведения § 4). Тогда

(3) $$M(u', v') = M(v, u)' = M(u, v)^*$$

(где M' обозначает матрицу, транспонированную к M, а M^* — транспонированную к обратной).

(4) $$M(\omega u, \omega v) = M(u, v),$$

где $\omega\colon \Lambda \to \Lambda$ — инволюция, определенная в § 2.

Все эти утверждения очевидны.

Рассмотрим теперь пять $\mathbb{Z}$-базисов в Λ^n, определенных в § 2 и 3: (e_λ), (f_λ), (h_λ), (m_λ), (s_λ). Мы покажем, что все матрицы перехода, связывающие пары из этих базисов, могут быть выражены в терминах матрицы $K = M(s, m)$ и матрицы сопряжения J.

Поскольку базисы (m_λ) и (h_λ) двойственны друг к другу, а базис (s_λ) самодвойствен (4.8), то

$$M(s,\ h) = K^*$$

в силу (6.3) (3). Применяя теперь инволюцию ω и замечая, что в силу (3.8) $M(\omega s, s) = J$, мы получим, что

$$M(s,\ e) = M(\omega s,\ h) = M(\omega s,\ s)\, M(s,\ h) = JK^*$$

в силу (6.3) (1) и (4). Наконец, снова используя (6.3) (3), мы видим, что

$$M(s,\ f) = M(s,\ e)^* = (JK^*)^* = JK.$$

Используя (6.3) (1) и (2), мы можем теперь заполнить следующую таблицу матриц перехода, в которой в строке u и столбце v стоит матрица $M(u, v)$:

Таблица 1

	e	h	m	f	s
e	1	$K'JK^*$	$K'JK$	$K'K$	$K'J$
h	$K'JK^*$	1	$K'K$	$K'JK$	K'
m	$K^{-1}JK^*$	$K^{-1}K^*$	1	$K^{-1}JK$	K^{-1}
f	$K^{-1}K^*$	$K^{-1}JK^*$	$K^{-1}JK$	1	$K^{-1}J$
s	JK^*	K^*	K	JK	1

Некоторые из матриц перехода в таблице 1 допускают комбинаторную интерпретацию. Из (5.13) вытекает, что

(6.4) *$K_{\lambda\mu}$ есть число таблиц формы λ и веса μ.* ∎

Числа $K_{\lambda\mu}$ иногда называют *числами Костки.* В силу (6.4) они неотрицательны. Более того,

(6.5) *Матрица $(K_{\lambda\mu})$ является строго верхней унитреугольной.*

Доказательство. Если T — таблица формы λ и веса μ, то для каждого $r \geqslant 1$ в T имеется всего $\mu_1 + \ldots + \mu_r$ символов $\leqslant r$, причем все они должны быть расположены в верхних r

строках T (из-за условия строгого возрастания по столбцам в определении таблицы). Отсюда $\mu_1 + \ldots + \mu_r \leqslant \lambda_1 + \ldots \ldots + \lambda_r$ для всех $r \geqslant 1$, т. е. $\mu \leqslant \lambda$. Значит, $K_{\lambda\mu} = 0$, если не выполняется условие $\lambda \geqslant \mu$; из тех же соображений $K_{\lambda\lambda} = 1$. ∎

(6.6) (i) *$M(e, m)_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} K_{\nu\lambda} K_{\nu'\mu}$ есть число матриц из нулей и единиц с суммами по строкам λ_i и суммами по столбцам μ_j.*

(ii) *$M(h, m)_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} K_{\nu\lambda} K_{\nu\mu}$ есть число матриц из целых неотрицательных чисел с суммами по строкам λ_i и суммами по столбцам μ_j.*

Доказательство. (i) Рассмотрим коэффициент при одночлене x^μ в функции $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots$ (где μ — разбиение числа n). Каждый одночлен, входящий в e_{λ_i}, имеет вид $\prod_j x_j^{a_{ij}}$, где все a_{ij} равны 0 или 1 и $\sum_j a_{ij} = \lambda_i$; значит, должно выполняться равенство

$$\prod_{i,\ j} x_j^{a_{ij}} = \prod_j x_j^{\mu_j},$$

так что $\sum_i a_{ij} = \mu_j$. Отсюда следует, что в матрице (a_{ij}) суммы по строкам равны λ_i, а суммы по столбцам равны μ_j.

Доказательство (ii) аналогично: единственное отличие состоит в том, что функция e_λ заменяется на h_λ и, следовательно, показатели a_{ij} могут теперь быть произвольными целыми числами $\geqslant 0$. ∎

Следующие утверждения извлекаются из таблицы 1 и (6.5):

(6.7) (i) *Матрицы $M(s, h)$ и $M(h, s)$ являются строго нижними унитреугольными.*

(ii) *Матрицы $M(s, m)$ и $M(m, s)$ — строго верхние унитреугольные.*

(iii) *$M(e, m) = M(h, f)$, причем эта матрица симметрична.*

(iv) *$M(e, f) = M(h, m)$, причем эта матрица симметрична.*

(v) *$M(e, h) = M(h, e)$.*

(vi) *$M(m, f) = M(f, m)$.*

(vii) *$M(h, s) = M(s, m)'$.*

(viii) *$M(e, s) = M(s, f)'$.*

Замечания. 1. Из (6.4) и (6.6) (i) вытекает, что число (0, 1)-матриц с суммами по строкам λ_i и суммами по столбцам μ_j равно числу пар таблиц сопряженной формы и весов λ и μ.

	2	1^2
2	1	1
1^2		1

	3	21	1^3
3	1	1	1
21		1	2
1^3			1

	4	31	2^2	21^2	1^4
4	1	1	1	1	1
31		1	1	2	3
2^2			1	1	2
21^2				1	3
1^4					1

	5	41	32	31^2	2^21	21^3	1^5
5	1	1	1	1	1	1	1
41		1	1	2	2	3	4
32			1	1	2	3	5
31^2				1	1	3	6
2^21					1	2	5
21^3						1	4
1^5							1

	6	51	42	41^2	3^2	321	31^3	2^3	2^21^2	21^4	1^6
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
51		1	1	2	1	2	3	2	3	4	5
42			1	1	1	2	3	3	4	6	9
41^2				1	0	1	3	1	3	6	10
3^2					1	1	1	1	2	3	5
321						1	2	2	4	8	16
31^3							1	0	1	4	10
2^3								1	1	2	5
2^21^2									1	3	9
21^4										1	5
1^6											1

В действительности между этими двумя множествами объектов можно установить явное взаимно однозначное соответствие (двойственное соответствие Кнута [22], [51]).

Аналогично имеется явное взаимно однозначное соответствие, также принадлежащее Кнуту, между матрицами из целых неотрицательных чисел с суммами по строкам λ_i и суммами по столбцам μ_j и парами таблиц одинаковой формы весов λ и μ.

2. Мы пока не рассматривали матрицы перехода, связанные с $\mathbb{Q}$-базисом (p_λ). На самом деле, как будет показано в § 7, матрица $M(p, s)$ есть таблица характеров симметрической группы S_n.

Примеры

1. $M(h, m)_{\lambda\mu}$ равно числу двойных смежных классов $S_\lambda w S_\mu$ в S_n, где $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots$, $S_\mu = S_{\mu_1} \times S_{\mu_2} \times \ldots$.

2. $M(e, m)_{\lambda\mu} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \leqslant \mu'$. (Это теорема Гейла — Райзера; доказательство см. в [42][1]).)

3. Для всех разбиений λ числа n число $K_{\lambda,\,(1^n)}$ в силу (6.4) равно числу стандартных таблиц формы λ, так что в силу примера 2 § 5 $K_{\lambda,\,(1^n)} = n!/h$), где $h(\lambda)$ есть произведение длин крюков диаграммы λ.

4. (Бесконечная) матрица K есть диагональная сумма матриц K_n $(n \geqslant 0)$, где $K_n = (K_{\lambda\mu})_{\lambda,\,\mu \in \mathscr{P}_n}$. Имеем $K_0 = K_1 = (1)$; матрицы K_n при $n = 2, 3, \ldots, 6$ приведены на предыдущей странице.

5. Если λ — разбиение числа n, то $\varepsilon_\lambda (K^{-1})_{\lambda,\,(1^n)}$ равняется полиномиальному коэффициенту $l(\lambda)! \Big/ \prod\limits_{i \geqslant 1} m_i(\lambda)!$.

Замечания и библиографические указания

Взаимоотношения между различными матрицами перехода, содержащиеся в таблице 1 и (6.7), были известны уже Костке [25]. См. также [10].

7. Характеры симметрических групп

В этом разделе мы будем предполагать известными элементарные факты о представлениях и характерах конечных групп.

Если G — конечная группа, а f и g — функции на G со значениями в коммутативной $\mathbb{Q}$-алгебре, то *скалярное произведение* f и g определяется формулой

$$\langle f, g\rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\, g(x^{-1}).$$

[1]) См. также пример 8° § 7 ниже. — *Прим. перев.*

Если H — подгруппа в G, а f — характер H, то индуцированный характер группы G будет обозначаться через $\operatorname{ind}_H^G(f)$. Если g — характер группы G, то его ограничение на H будет обозначаться через $\operatorname{res}_G^H(g)$.

Каждая перестановка $w \in S_n$ однозначно разлагается в произведение непересекающихся циклов. Если порядки этих циклов равны $\rho_1, \rho_2, \ldots$, где $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots$, то $\rho(w) = (\rho_1, \rho_2, \ldots)$ есть разбиение числа n, называемое *цикловым типом* перестановки w. Оно определяет w с точностью до сопряженности в S_n; таким образом, классы сопряженности в S_n параметризованы разбиениями числа n.

Определим отображение $\psi\colon S_n \to \Lambda^n$ следующим образом:

$$\psi(w) = p_{\rho(w)}.$$

Если m, n — положительные целые числа, то мы можем вложить группу $S_m \times S_n$ в S_{m+n}, заставив S_m и S_n действовать на дополнительные подмножества в $\{1, 2, \ldots, m+n\}$. Разумеется, это можно сделать многими разными способами, но все получающиеся подгруппы в S_{m+n} сопряжены между собой. Значит, если $v \in S_m$ и $w \in S_n$, то элемент $v \times w \in S_{m+n}$ корректно определен с точностью до сопряженности в S_{m+n} и имеет цикловый тип $\rho(v \times w) = \rho(v) \cup \rho(w)$, так что

$$\psi(v \times w) = \psi(v)\,\psi(w). \tag{7.1}$$

Обозначим через R^n $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный неприводимыми характерами группы S_n, и положим

$$R = \bigoplus_{n \geqslant 0} R^n$$

(учитывая, что $S_0 = \{1\}$, так что $R^0 = \mathbb{Z}$). Тогда $\mathbb{Z}$-модуль R обладает структурой кольца, определяемой следующим образом. Пусть $f \in R^m$, $g \in R^n$ и группа $S_m \times S_n$ вложена в S_{m+n}. Тогда $f \times g$ есть характер $S_m \times S_n$, и мы по определению полагаем

$$f \cdot g = \operatorname{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(f \times g)$$

— это характер группы S_{m+n}, т. е. элемент R^{m+n}. Таким образом, мы определили билинейное умножение $R^m \times R^n \to R^{m+n}$, и нетрудно проверить, что это умножение превращает R в коммутативное ассоциативное градуированное кольцо с единицей.

Более того, кольцо R снабжено скалярным произведением: если $f, g \in R$, скажем $f = \sum f_n$, $g = \sum g_n$ с $f_n, g_n \in R^n$, то по определению

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geqslant 0} \langle f_n, g_n \rangle_{S_n}.$$

Далее, определим $\mathbf{Z}$-линейное отображение

$$\mathrm{ch}\colon R \to \Lambda_{\mathbf{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

следующим образом: если $f \in R^n$, то

$$\mathrm{ch}(f) = \langle f, \psi\rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w)\psi(w)$$

(поскольку $\psi(w) = \psi(w^{-1})$). Если значение f на элементах циклового типа ρ есть f_ρ, то

(7.2) $$\mathrm{ch}(f) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho.$$

Функция $\mathrm{ch}(f)$ называется *характеристикой* f, а отображение ch — *характеристическим отображением.* Из (7.2) и (4.7) вытекает, что для всех f и g из R^n

$$\langle \mathrm{ch}(f), \mathrm{ch}(g)\rangle = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho g_\rho = \langle f, g\rangle_{S_n},$$

т. е. что отображение ch — *изометрия.*

Следующий факт является основным.

(7.3) *Характеристическое отображение есть изометрический изоморфизм кольца R на Λ.*

Доказательство. Сначала проверим, что ch — гомоморфизм колец. Если $f \in R^m$ и $g \in R^n$, то, применяя двойственность Фробениуса и (7.1), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(f \cdot g) &= \left\langle \mathrm{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (f \times g), \psi \right\rangle_{S_{m+n}} = \\ &= \left\langle f \times g, \mathrm{res}_{S_{m+n}}^{S_m \times S_n}(\psi) \right\rangle_{S_m \times S_n} = \langle f, \psi\rangle_{S_m} \langle g, \psi\rangle_{S_n} = \\ &= \mathrm{ch}(f) \cdot \mathrm{ch}(g).\end{aligned}$$

Далее, пусть η_n — единичный характер группы S_n. Тогда

$$\mathrm{ch}(\eta_n) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho = h_n$$

в силу (7.2) и (2.14′). Если теперь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — произвольное разбиение числа n, то обозначим через η_λ произведение $\eta_{\lambda_1} \cdot \eta_{\lambda_2} \cdot \ldots$. Тогда η_λ является характером S_n, а именно характером, индуцированным единичным характером подгруппы $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots$, и мы имеем $\mathrm{ch}(\eta_\lambda) = h_\lambda$.

Положим теперь по определению для всех разбиений λ числа n

(7.4) $$\chi^\lambda = \det\left(\eta_{\lambda_i - i + j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \in R^n,$$

т. е. χ^λ есть характер группы S_n (возможно, виртуальный), и в силу (3.4) имеем

(7.5) $$\operatorname{ch}(\chi^\lambda) = s_\lambda.$$

Поскольку ch — изометрия, из (4.8) вытекает, что $\langle\chi^\lambda, \chi^\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$ для любых двух разбиений λ и μ, а значит, в частности, что с точностью до знака характеры χ^λ являются неприводимыми характерами группы S_n. Поскольку число классов сопряженности в S_n равно числу разбиений числа n, то этими характерами исчерпываются все неприводимые характеры S_n; отсюда вытекает, что элементы χ^λ при $|\lambda| = n$ образуют базис в R^n, следовательно, ch является изоморфизмом между R^n и Λ^n при всех n, а значит, и между R и Λ. ∎

(7.6) *Неприводимые характеры группы S_n — это в точности характеры χ^λ $(|\lambda| = n)$, определенные формулой* (7.4).

Доказательство. Из доказательства (7.3) ясно, что нам осталось только показать, что χ^λ, а не $-\chi^\lambda$, является неприводимым характером; для этого достаточно показать, что $\chi^\lambda(1) > 0$. Из (7.5) и (7.2) получаем, что

$$s_\lambda = \operatorname{ch}(\chi^\lambda) = \sum_\rho z_\rho^{-1}\chi_\rho^\lambda p_\rho,$$

где χ_ρ^λ есть значение характера χ^λ на элементах циклового типа ρ. Отсюда

(7.7) $$\chi_\rho^\lambda = \langle s_\lambda, p_\rho\rangle$$

в силу (4.7) и, в частности, $\chi^\lambda(1) = \chi^\lambda_{(1^n)} = \langle s_\lambda, p_1^n\rangle$, так что

$$h_1^n = p_1^n = \sum_{|\lambda|=n} \chi^\lambda(1)\, s_\lambda$$

и, следовательно,

$$\chi^\lambda(1) = M(h, s)_{(1^n),\, \lambda} = K_{\lambda,\, (1^n)}$$

из таблицы 1; значит, $\chi^\lambda(1)$ является числом стандартных таблиц формы λ, т. е. положительным целым числом. ∎

(7.8) *Матрица перехода $M(p, s)$ есть таблица характеров группы S_n, т. е.*

$$p_\rho = \sum_\lambda \chi_\rho^\lambda s_\lambda.$$

Это переформулировка (7.7). ∎

Для каждых трех разбиений λ, μ, ν числа n положим

$$\gamma_{\mu\nu}^\lambda = \langle\chi^\lambda, \chi^\mu\chi^\nu\rangle_{S_n} = \frac{1}{n!}\sum_{w\in S_n} \chi^\lambda(w)\,\chi^\mu(w)\,\chi^\nu(w);$$

это выражение симметрично относительно λ, μ и ν. Тогда для двух множеств переменных $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$

(7.9) $$s_\lambda(xy)=\sum_{\mu,\nu}\gamma^\lambda_{\mu\nu}s_\mu(x)s_\nu(y).$$

(Сравните с (5.9).[1]))

Доказательство. Для всех разбиений ρ выполняется равенство $p_\rho(xy)=p_\rho(x)p_\rho(y)$, откуда в силу (7.8)

$$\sum_\lambda \chi^\lambda s_\lambda(xy)=\sum_{\mu,\nu}\chi^\mu\chi^\nu s_\mu(x)s_\nu(y),$$

так что $s_\lambda(xy)$ — коэффициент при χ^λ в правой части. ∎

*Пусть $f, g\in\Lambda^n$, скажем $f=\mathrm{ch}(u)$, $g=\mathrm{ch}(v)$, где u, v — центральные функции на S_n. Определим *внутреннее произведение* функций f и g формулой $f*g=\mathrm{ch}(uv)$, где uv — это функция $w\mapsto u(w)v(w)$ $(w\in S_n)$. По отношению к этому произведению Λ^n становится коммутативным и ассоциативным кольцом с единичным элементом h_n. Имеем

(7.10) $$s_\lambda * s_\mu=\sum\gamma^\nu_{\lambda\mu}s_\nu$$

(λ, μ, ν — разбиения числа n), так что в силу (7.9) и симметрии коэффициентов $\gamma^\nu_{\lambda\mu}$ получаем

(7.11) $$s_\lambda(xy)=\sum_\mu s_\mu(x)(s_\lambda * s_\mu)(y).$$

Кроме того, $p_\lambda * p_\mu=\delta_{\lambda\mu}z_\lambda p_\lambda$, так что элементы $z_\nu^{-1}p_\lambda\in\Lambda^n_{\mathbf{Q}}$ — это попарно ортогональные идемпотенты, а их сумма равна единичному элементу h_n в силу (2.14)*.

Примеры

1. $\chi^{(n)}=\eta_n$ есть единичный характер группы S_n, а $\chi^{(1^n)}=\varepsilon_n=\varepsilon$ — характер знака перестановки. (Сравните (7.10) с (2.14′).)

2. Для всех разбиений λ числа n имеем $\chi^{\lambda'}=\varepsilon_n\chi^\lambda$. В самом деле,

$$\chi^{\lambda'}_\rho=\langle s_{\lambda'}, p_\rho\rangle=\langle s_\lambda, \varepsilon_\rho p_\rho\rangle=\varepsilon_\rho\chi^\lambda_\rho,$$

так как $\omega(s_{\lambda'})=s_\lambda$ и $\omega(p_\rho)=\varepsilon_\rho p_\rho$. Значит, инволюция ω кольца Λ соответствует умножению на ε_n в R^n. Таким образом, $e_n * f=\omega(f)$ при $f\in\Lambda^n$.

3. Каждой косой диаграмме $\lambda-\mu$ веса n соответствует характер $\chi^{\lambda/\mu}$ группы S_n, определяемый формулой $\mathrm{ch}(\chi^{\lambda/\mu})=s_{\lambda/\mu}$. Если $|\mu|=m$, то из (5.1) и (7.3) получаем

$$\langle\chi^{\lambda/\mu}, \chi^\nu\rangle_{S_n}=\langle\chi^\lambda, \chi^\mu\cdot\chi^\nu\rangle_{S_{m+n}}=\langle\mathrm{res}^{S_{m+n}}_{S_m\times S_n}\chi^\lambda, \chi^\mu\times\chi^\nu\rangle_{S_m\times S_n}$$

---

[1]) Через (xy) обозначается набор переменных (x_iy_j) $(i, j=1, 2, \ldots)$. — *Прим. перев.*

в силу двойственности Фробениуса и, следовательно, ограничение характера χ^{λ} на подгруппу $S_m \times S_n$ есть $\sum\limits_{|\mu|=m} \chi^{\mu} \times \chi^{\lambda/\mu}$.

Степень характера $\chi^{\lambda/\mu}$ равняется $\langle s_{\lambda/\mu}, e_1^n \rangle = K_{\lambda-\mu,\,(1^n)}$, т. е. числу стандартных таблиц формы $\lambda - \mu$.

4. Пусть G — подгруппа в S_n, а $c(G)$ — цикловый индикатор G (пример 9 § 2). Тогда $c(G) = \mathrm{ch}(\chi_G)$, где χ_G есть характер S_n, индуцированный тривиальным характером 1_G подгруппы G. В самом деле, $\mathrm{ch}(\chi_G) = \langle \chi_G, \psi \rangle_{S_n} = \langle 1_G, \psi|_G \rangle_G$ (в силу двойственности Фробениуса) $= c(G)$.

Если G и H — подгруппы в S_n, то $\langle c(G), c(H) \rangle$ есть число (G, H)-двойных смежных классов в S_n.

5. Из примера 11 § 3 и (7.8) мы получаем следующее комбинаторное правило для вычисления χ_{ρ}^{λ}:

$$\chi_{\rho}^{\lambda} = \sum_{S} (-1)^{\mathrm{ht}(S)},$$

где сумма берется по всем последовательностям разбиений $S = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$, таким, что $m = l(\rho)$, $0 = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(m)} = \lambda$ и каждая разность $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ является косым ρ_i-крюком, а $\mathrm{ht}(S) = \sum\limits_{i} \mathrm{ht}(\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)})$.

6. Степень $f^{\lambda} = \chi^{\lambda}(1)$ характера χ^{λ} можно вычислить также следующим образом. В силу (7.8) она равна коэффициенту при $x^{\lambda+\delta}$ в $\left(\sum x_i\right)^n \sum\limits_{w \in S_n} \varepsilon(w) x^{w\delta}$. Полагая $\mu = \lambda + \delta$ (так что $\mu_i = \lambda_i + n - i$, $1 \leqslant i \leqslant n$), мы видим, что этот коэффициент равен

$$\sum_{w \in S_n} \varepsilon(w)\, n! \Big/ \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - n + w(i))!$$

что равно определителю $n! \det(1/(\mu_i - n + j)!)$, а значит, равно

$$\frac{n!}{\mu!} \det(\mu_i(\mu_i - 1) \ldots (\mu_i - n + j + 1)) = \frac{n!}{\mu!} \det\left(\mu_i^{j-1}\right) = \frac{n!}{\mu!} \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

где $\mu! = \prod\limits_{i} \mu_i!$ и $\Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \prod\limits_{i<j} (\mu_i - \mu_j)$.

7. Пусть $\rho = (r, 1^{n-r})$, так что χ_{ρ}^{λ} есть значение характера χ^{λ} группы S_n на r-цикле $(1 \leqslant r \leqslant n)$. В силу (7.8) χ_{ρ}^{λ} есть коэффициент при $x^{\mu} = x^{\lambda+\delta}$ в $\left(\sum x_i^r\right)\left(\sum x_i\right)^{n-r} \sum\limits_{w \in S_n} \varepsilon(w) x^{w\delta}$. Из результата примера 6 вытекает, что этот коэффициент равен

$$\sum_{i} \frac{(n-r)!\,\Delta(\mu_1, \ldots, \mu_i - r, \ldots, \mu_n)}{\mu_1! \ldots (\mu_i - r)! \ldots \mu_n!}$$

и, следовательно,

$$\chi_{\rho}^{\lambda}/f^{\lambda} = \frac{(n-r)!}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i!}{(\mu_i - r)!} \prod_{j \neq i} \frac{\mu_i - \mu_j - r}{\mu_i - \mu_j}.$$

Если положить $\varphi(x)=\prod(x-\mu_i)$ и $h_\rho=n!/z_\rho=n!/(n-r)!\,r$, то эта формула принимает вид

$$-r^2h_\rho\chi^\lambda_\rho/f^\lambda=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\mu_i-1)\ldots(\mu_i-r+1)\,\varphi(\mu_i-r)/\varphi'(\mu_i),$$

что равно коэффициенту при x^{-1} в разложении функции

$$x(x-1)\ldots(x-r+1)\,\varphi(x-r)/\varphi(x)$$

по *убывающим* степеням переменной x.

В частности, при $r=2$ мы получаем

$$h_\rho\chi^\lambda_\rho/f^\lambda=n(\lambda')-n(\lambda).$$

8°. Обозначим через $\Lambda^n_+\subset\Lambda^n$ полугруппу, состоящую из (целочисленных) линейных комбинаций S-функций s_λ $(|\lambda|=n)$ с *неотрицательными* коэффициентами; очевидно, что $\langle f, g\rangle\geqslant 0$ при $f, g\in\Lambda^n_+$. В силу (7.5) и (7.6) Λ^n_+ состоит из характеристик *настоящих* (а не просто виртуальных) характеров группы S_n. Из (7.3) и определения умножения в кольце R вытекает, что $\Lambda^m_+\cdot\Lambda^n_+\subset\Lambda^{m+n}_+$ при $m, n\geqslant 0$. В частности, функции h_λ и e_λ лежат в Λ^n_+ для всех разбиений λ числа n. Примеры 2 и 3 показывают, что $s_{\lambda/\mu}\in\Lambda^n_+$ для всех косых диаграмм $\lambda-\mu$ веса n и что инволюция ω переводит Λ^n_+ в себя.

Определим на Λ^n отношение частичного порядка, полагая $f\geqslant g$, если $f-g\in\Lambda^n_+$. Пусть λ и μ — разбиения числа n. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\text{(a) } \lambda\geqslant\mu;\qquad \text{(b) } s_\lambda\leqslant h_\mu;\qquad \text{(c) } s_{\lambda'}\leqslant e_\mu;$$

$$\text{(d) } h_\lambda\leqslant h_\mu;\qquad \text{(e) } e_\lambda\leqslant e_\mu;\qquad \text{(f) } M(e, m)_{\lambda'\mu}>0.$$

В самом деле, импликации (d) $\Rightarrow$ (b) и (f) $\Rightarrow$ (a) вытекают из (6.5) и (6.6), а применение инволюции ω показывает, что (b) $\Leftrightarrow$ (c) и (d) $\Leftrightarrow$ (e). Поскольку $M(e, m)_{\lambda'\mu}=\langle e_{\lambda'}, h_\mu\rangle$, мы видим, что (f) вытекает из (b) и (c). Осталось доказать импликацию (a) $\Rightarrow$ (d). В силу (1.16) мы можем считать, что разбиение λ получается из μ действием некоторого повышающего оператора R_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant n)$. Но тогда

$$h_\mu-h_\lambda=\prod_{k\neq i,\,j}h_{\mu_k}\cdot\left(h_{\mu_i}h_{\mu_j}-h_{\mu_i+1}h_{\mu_j-1}\right)=$$

$$=\prod_{k\neq i,\,j}h_{\mu_k}\cdot s_{(\mu_i,\,\mu_j)}\ \text{(в силу 3.4)}\geqslant 0,$$

что и требуется.

Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (f) есть теорема Гейла — Райзера (пример 2 § 6). Другое комбинаторное следствие: если $\lambda\geqslant\mu$, то $K_{\theta,\,\lambda}\leqslant K_{\theta,\,\mu}$ для всех косых диаграмм θ веса n (возьмите скалярное произведение обеих частей (d) с функцией s_θ и воспользуйтесь (5.13)). В частности, если $\lambda\geqslant\mu$, то $K_{\lambda\mu}>0$ (поскольку $K_{\lambda\lambda}=1$). Таким образом, для существования таблицы формы λ и веса μ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda\geqslant\mu$.

9*. (a) Имеет место равенство

$$\sum_\lambda s_\lambda * s_\lambda=\prod_{k\geqslant 1}(1-p_k)^{-1},$$

где сумма слева берется по всем разбиениям. В самом деле,

$$s_\lambda * s_\lambda = \sum_\rho z_\rho^{-1} \left(\chi_\rho^\lambda\right)^2 p_\rho;$$

далее $\sum\limits_\lambda \left(\chi_\rho^\lambda\right)^2 = z_\rho$ в силу соотношения ортогональности для характеров, откуда следует, что

$$\sum_{|\lambda|=n} s_\lambda * s_\lambda = \sum_{|\rho|=n} p_\rho,$$

а это эквивалентно нашему утверждению.

(b) Имеем

$$\prod_{i,\, j,\, k} (1 - x_i y_j z_k)^{-1} = \sum_{\lambda,\, \mu} s_\lambda(x)\, s_\mu(y)\, (s_\lambda * s_\mu)(z),$$

$$\prod_{i,\, j,\, k} (1 + x_i y_j z_k) = \sum_{\lambda,\, \mu} s_\lambda(x)\, s_{\mu'}(y)\, (s_\lambda * s_\mu)(z).$$

10. (a)* Положим $\varphi = \sum\limits_{|\lambda|=n} \chi^\lambda$. Если перестановка $w \in S_n$ имеет цикловый тип ρ, то

$$\varphi(w) = \sum_\lambda \chi_\rho^\lambda = \sum_\lambda \langle s_\lambda, p_\rho \rangle = \langle s, p_\rho \rangle,$$

где (пример 4 § 5) $s = \prod\limits_i (1 - x_i)^{-1} \prod\limits_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1}$. Вычислив $\log s$, покажите, что

$$s = \prod_{n \text{ нечетно}} \exp\left(\frac{p_n}{n} + \frac{p_n^2}{2n}\right) \prod_{n \text{ четно}} \exp\left(\frac{p_n^2}{2n}\right),$$

и, следовательно, $\varphi(w) = \prod\limits_{i \geqslant 1} a_i^{(m_i(\rho))}$, где $a_i^{(m)}/m!$ есть коэффициент при t^m в одном из рядов $\exp(t + it^2/2)$ или $\exp(it^2/2)$ в зависимости от того, является i нечетным или четным. В частности, если для некоторого $r \geqslant 1$ перестановка w содержит нечетное число $2r$-циклов, то $\varphi(w) = 0$.

(b)° Положим $\varphi_0 = \sum \chi^\mu$, где сумма берется по четным разбиениям μ числа $2n$ (т. е. таким, что все части μ_i четны). То же рассуждение, что в (a), показывает, что если $w \in S_{2n}$ имеет цикловый тип ρ, то $\varphi_0(w) = \prod\limits_{i \geqslant 1} b_i^{(m_i(\rho))}$, где $b_i^{(m)}/m!$ есть коэффициент при t^m в $\exp(t + it^2/2)$ или в $\exp(it^2/2)$ в зависимости от того, является i четным или нечетным. В частности, если для некоторого $r \geqslant 1$ число $(2r-1)$-циклов в w нечетно, то $\varphi_0(w) = 0$; кроме того, $\varphi_0(1) = (2n)!2^n n!$.

Покажите, что $\varphi_0 = \operatorname{ind}_{B_n}^{S_{2n}}(1)$, где B_n — централизатор в S_{2n} некоторой перестановки циклового типа (2^n).

11*. Пусть C_n — циклическая подгруппа в S_n, порожденная некоторым n-циклом, и пусть θ — некоторый инъективный характер группы C_n. Покажите, что индуцированный характер $\varphi_n = \operatorname{ind}_{C_n}^{S_n}(\theta)$ не зависит от выбора θ и что

$$\operatorname{ch}(\varphi_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\, p_d^{n/d},$$

где μ — функция Мёбиуса,

(Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем k характеристики 0, и пусть $L(V) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} L^n(V)$ — свободная алгебра Ли над k, порожденная пространством V. Тогда L^n является однородным полиномиальным функтором степени n для всех $n \geqslant 0$, а $\alpha(Ln) = \varphi_n$ в обозначениях п. (A5.4) приложения к этой главе.)

12*. Для каждого разбиения λ числа n обозначим через M^λ матричное представление группы S_n с характером χ^λ. Можно выбрать M^λ так, чтобы для всех $w \in S_n$ матрица $M^\lambda(w)$ была *целочисленной* (хотя мы этого и не доказывали). Для каждого разбиения ρ числа n обозначим через c_ρ сумму (в групповом кольце ZS_n) всех элементов циклового типа ρ в S_n. Тогда c_ρ коммутирует со всеми $w \in S_n$, и, значит, в силу леммы Шура (поскольку представление M^λ неприводимо) матрица $M^\lambda(c_\rho)$ является скалярным кратным единичной матрицы, скажем, $M^\lambda(c_\rho) = \omega_\rho^\lambda \cdot 1$, где ω_ρ^λ — целое число. Беря следы, мы получим

$$n! \chi_\rho^\lambda / z_\rho = n! \omega_\rho^\lambda / h(\lambda),$$

где $h(\lambda)$ есть произведение длин крюков разбиения λ (пример 7 §1), и следовательно, число $\omega_\rho^\lambda = h(\lambda) \chi_\rho^\lambda / z_\rho$ является *целым* для всех λ, ρ. Отсюда вытекает, что функция

$$\tilde{s}_\lambda = h(\lambda) s_\lambda = \sum_\rho \frac{h(\lambda)}{z_\rho} \chi_\rho^\lambda p_\rho = \sum_\rho \omega_\rho^\lambda p_\rho$$

является многочленом от степенных сумм p_ρ с целыми коэффициентами, т. е. $\tilde{s}_\lambda \in \Pi$, где через Π обозначено подкольцо $Z[p_1, p_2, \ldots]$ в Λ.

(a) Под действием специализации $p_r \longmapsto X$ (при всех $r \geqslant 1$) функция $\tilde{s}_\lambda$ превращается в многочлен содержаний $c_\lambda(X) = \prod\limits_{x \in \lambda} (X + c(x))$ (пример 8 § 1; пример 4 § 3). Поэтому если λ и μ — два разбиения числа n, а p — некоторое простое число, то из примера 8 (c) § 1 вытекает, что

$$\tilde{s}_\lambda \equiv \tilde{s}_\mu \pmod{p\Pi} \Rightarrow \lambda \underset{p}{\sim} \mu.$$

В действительности, обратная импликация также справедлива («гипотеза Накаямы»).

(b) Отметим в связи с этим, что существует ряд доводов в пользу следующей гипотезы. Пусть λ, μ — такие разбиения, что $\lambda \supset \mu$ и $\lambda - \mu$ есть косой p-крюк. Тогда должно выполняться сравнение

$$\tilde{s}_\lambda \equiv \tilde{s}_\mu \tilde{s}_{(p)} \pmod{p\Pi}.$$

Здесь p — произвольное целое число $\geqslant 2$ (не обязательно простое).

13*. Пусть p — простое число; обозначим через Π_p' подкольцо в $\Pi = Z[p_1, p_2, \ldots]$, порожденное элементами p_r, где r взаимно просто с p. Покажите, что (в обозначениях примера 12) $\tilde{s}_\lambda \in \Pi_p'$ тогда и только тогда, когда разбиение λ является p-сердцевиной. [Если λ является p-сердцевиной, то все его длины крюков взаимно просты с p, следовательно, из λ нельзя удалить никакого косого r-крюка ни для какого числа r, кратного p. Из этого наблюдения и примера 5 вытекает, что $\chi_\rho^\lambda = 0$, если хотя бы одна часть разбиения ρ делится на p, а значит, $\tilde{s}_\lambda \in \Pi_p'$.

Обратно, если разбиение λ не является p-сердцевиной, то обозначим через λ^* и $\bar{\lambda}$ его p-частное и p-сердцевину соответственно; пусть $|\lambda^*| =$

$= b \geqslant 1$ и $|\bar{\lambda}| = a$. Для разбиения $\rho = (p^b 1^a)$ покажите, что $\chi^\lambda_\rho = \pm b!a!/h(\tilde{\lambda})\, h(\lambda^*) \neq 0$, а потому $\tilde{s}_\lambda \notin \Pi'_p$.]

14*. (a) Обозначим через X матрицу перехода $M(p, s)$, так что X есть диагональная сумма матриц X_n $(n \geqslant 0)$, где X_n — это таблица характеров симметрической группы S_n. Имеют место равенства $XX' = z$, $XJ = \varepsilon X$, где z, ε — соответственно, диагональные матрицы $(\delta_{\lambda\mu} z_\lambda)$, $(\delta_{\lambda\mu} \varepsilon_\lambda)$.

(b) Обозначим через L матрицу перехода $M(p, m)$. Одночлены, входящие в разложение функции p_λ, имеют вид $x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \ldots$, где индексы i_1, $i_2, \ldots$ могут совпадать между собой. Таким образом, $L_{\lambda\mu}$ есть число таких одночленов, равных $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots$, т. е. равняется числу отображений φ множества $\{1, 2, \ldots, l(\lambda)\}$ в $\{1, 2, \ldots, l(\mu)\}$, таких, что $\sum_{\varphi(i)=j} \lambda_i = \mu_j$ при $1 \leqslant j \leqslant l(\mu)$. Отсюда вытекает, что (i) $L_{\lambda\mu} = 0$, за исключением случая, когда $\lambda \leqslant \mu$, так что матрица L строго нижняя треугольная;

(ii) $L_{\mu\mu} = \prod_{i \geqslant 1} m_i(\mu)!$;

(iii) отношение $L_{\lambda\mu}/L_{\mu\mu}$ является целым числом.

(c) Имеют место равенства $X = LK^{-1}$, $K^{-1}JK = L^{-1}\varepsilon L$, $K'K = L'z^{-1}L$; кроме того, $M(p, e) = \varepsilon z L^*$, $M(p, f) = \varepsilon L$, $M(p, h) = zL^*$, где $L^* = (L')^{-1}$.

Замечания и библиографические указания

Теория представлений конечных групп была основана Фробениусом в ряде статей, опубликованных в последние годы девятнадцатого века и воспроизведенных в т. 3 его собрания сочинений; в частности, неприводимые характеры симметрических групп получены им в 1900 г. [12], и наше изложение по существу не отличается от его.

Пример 5 принадлежит Литтлвуду и Ричардсону [28] [1]), примеры 6 и 7 — Фробениусу (цит. выше).

Пример 10(a) принадлежит Дезарменьену и Ласку, примеры 10(b), 11 — Клячко [26°], [38°] соответственно, а пример 12(a) — Фарахату [32*].

8. Плетизм

В этом разделе мы вкратце изучим другого сорта умножение в Λ, называемое *плетизмом* или *композицией* и определяемое следующим образом. Пусть $f, g \in \Lambda$; запишем функцию g как сумму одночленов:

$$g = \sum_\alpha u_\alpha x^\alpha.$$

Введем теперь множество фиктивных переменных y_i, определяемых формулой

$$\prod (1 + y_i t) = \prod_\alpha (1 + x^\alpha t)^{u_\alpha}, \tag{8.1}$$

[1]) Он часто фигурирует в литературе под названием «правило Мурнагана — Накаямы». — *Прим. перев.*

и положим по определению

(8.2) $$f \circ g = f(y_1, y_2, \ldots).$$

Если $f \in \Lambda^m$ и $g \in \Lambda^n$, то ясно, что $f \circ g \in \Lambda^{mn}$. Кроме того, функция e_1 действует как двусторонняя единица: $f \circ e_1 = e_1 \circ f = f$ для всех $f \in \Lambda$.

Из определения (8.2) ясно, что

(8.3) *Для всех $g \in \Lambda$ отображение $f \mapsto f \circ g$ есть эндоморфизм кольца Λ.* ∎

Логарифмируя обе части (8.1), мы получим

$$p_n(y) = \sum_\alpha u_\alpha (x^\alpha)^n \qquad (n \geqslant 1),$$

так что

(8.4) $$p_n \circ g = g \circ p_n = g(x_1^n, x_2^n, \ldots)$$

для всех $g \in \Lambda$. В частности,

(8.5) $$p_n \circ p_m = p_m \circ p_n = p_{mn}.$$

Из (8.4) вытекает, что

(8.6) *Для всех $n \geqslant 1$ отображение $g \mapsto p_n \circ g$ есть эндоморфизм кольца Λ.* ∎

Плетизм ассоциативен: для всех $f, g, h \in \Lambda$

(8.7) $$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Доказательство. Поскольку функции p_n порождают кольцо $\Lambda_{\mathbf{Q}}$ (2.12), в силу (8.3) и (8.6) ассоциативность достаточно проверить, когда $f = p_m$ и $g = p_n$, а в этом случае она очевидна из (8.4) и (8.5). ∎

Для плетизма, включающего в себя S-функции, имеются следующие формулы: из (5.9) вытекает, что

(8.8) $$s_\lambda \circ (g + h) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu}^\lambda (s_\mu \circ g)(s_\nu \circ h) = \sum_\mu (s_{\lambda/\mu} \circ g)(s_\mu \circ h),$$

а из (7.9) — что

(8.9) $$s_\lambda \circ (gh) = \sum_{\mu, \nu} \gamma_{\mu\nu}^\lambda (s_\mu \circ g)(s_\nu \circ h).$$

Суммирование в (8.8) идет по парам разбиений $\mu, \nu \subset \lambda$, а в (8.9) — по парам разбиений μ, ν, таким, что $|\mu| = |\nu| = |\lambda|$.

Наконец, пусть λ и μ — разбиения. Тогда $s_\lambda \circ s_\mu$ есть целочисленная линейная комбинация S-функций, скажем

(8.10) $$s_\lambda \circ s_\mu = \sum_\pi a_{\lambda\mu}^\pi s_\pi,$$

где сумма берется по разбиениям π, таким, что $|\pi|=|\lambda|\cdot|\mu|$. В приложении мы докажем, что *все коэффициенты $a^{\pi}_{\lambda\mu}$ неотрицательны.*

Замечания. 1. В (3.10) мы заметили, что каждой функции $f\in\Lambda$ соответствует естественная операция F на категории λ-колец. При этом соответствии плетизм переходит в композицию операций: если $f, g\in\Lambda$ соответствуют естественным операциям F, G, то $f\circ g$ соответствует $F\circ G$.

2. Характеристическое отображение позволяет определить плетизм в кольце R из § 7: при $u, v\in R$ плетизм $u\circ v$ определяется как $\mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{ch}\, u\circ \mathrm{ch}\, v)$. Если u (соответственно v) есть неприводимый характер группы S_m (соответственно S_n), то $u\circ v$ — характер группы S_{mn}, который можно описать следующим образом. Если U (соответственно V) есть S_m-модуль с характером u (соответственно S_n-модуль с характером v), то сплетение $S_n\sim S_m$ (которое есть нормализатор подгруппы $S_n^m=S_n\times\ldots\times S_n$ в S_{mn}) действует на U и на m-й тензорной степени $\mathrm{T}^m(V)$, а значит, и на $U\otimes\mathrm{T}^m(V)$; тогда $u\circ v$ есть характер S_{mn}-модуля, индуцированного модулем $U\otimes\mathrm{T}^m(V)$. См. приложение к этой главе.

Примеры

1*. (a) Пусть $f\in\Lambda^m$, $g\in\Lambda^n$. Тогда

$$\omega(f\circ g)=\begin{cases} f\circ(\omega g) & \text{при четном } n,\\ (\omega f)\circ(\omega g) & \text{при нечетном } n;\end{cases}$$

$$f\circ(-g)=(-1)^m(\omega f)\circ g.$$

(b) Для любых разбиений λ, μ обозначим через $\lambda\circ\mu\,(=\mu\circ\lambda)$ разбиение, части которого равны $\lambda_i\mu_j$. Тогда $p_\lambda\circ p_\mu=p_\mu\circ p_\lambda=p_{\lambda\circ\mu}$.

(c)
$$\omega(h_r\circ p_s)=(-1)^{r(s-1)}e_r\circ p_s.$$

2. Поскольку $s_{\lambda/\mu}=D_\mu(s_\lambda)$, где D_μ — дифференциальный оператор, определенный в примере 3(a) § 5, из (8.8) вытекает, что

$$f\circ(g+h)=\sum_\mu((D_\mu f)\circ g)(s_\mu\circ h)$$

для всех $f, g, h\in\Lambda$.

3.
$$h_n\circ(gh)=\sum_{|\lambda|=n}(s_\lambda\circ g)(s_\lambda\circ h),\qquad e_n\circ(gh)=\sum_{|\lambda|=n}(s_\lambda\circ g)(s_{\lambda'}\circ h).$$

Эти формулы есть частные случаи (8.9) (и являются следствиями из (4.3) и (4.3′)).

4. Пусть λ — разбиение длины $\leqslant n$; рассмотрим $(s_\lambda\circ s_{(n-1)})(x_1, x_2)$. По определению это равно $s_\lambda\left(x_1^{n-1}, x_1^{n-2}x_2, \ldots, x_2^{n-1}\right)$, т. е. $x_2^{(n-1)|\lambda|}\times s_\lambda\left(q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, 1\right)$, где $q=x_1x_2^{-1}$. С другой стороны, в силу положительности коэффициентов в (8.10) $(s_\lambda\circ s_{(n-1)})(x_1, x_2)$ есть линейная комбинация функций $s_\pi(x_1, x_2)$ с целыми неотрицательными коэффициентами,

где $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ и $\pi_1 + \pi_2 = (n-1)|\lambda| = d$. Но

$$s_\pi(x_1, x_2) = x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} + x_1^{\pi_1 - 1} x_2^{\pi_2+1} + \ldots + x_1^{\pi_2} x_2^{\pi_1} = \\ = x_2^d \left(q^{\pi_1} + q^{\pi_1 - 1} + \ldots + q^{\pi_2}\right).$$

Значит, $s_\lambda\left(q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, 1\right)$ — неотрицательная линейная комбинация многочленов $q^{\pi_1} + q^{\pi_1 - 1} + \ldots + q^{\pi_2}$, где $\pi_1 \geqslant \pi_2$ и $\pi_1 + \pi_2 = d$. Отсюда следует, что выражение $s_\lambda\left(q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, 1\right)$ есть *унимодальный* симметричный многочлен от q, т. е. что если при $0 \leqslant i \leqslant d$ коэффициент при q^i в этом многочлене равен a_i, то $a_i = a_{d-i}$ (симметричность) и $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \ldots \leqslant a_{[d/2]}$ (унимодальность).

Из примера 1 § 3 вытекает, что обобщенный многочлен Гаусса

$$\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - q^{n - c(x)}}{1 - q^{h(x)}}$$

симметричен и унимодален для всех n и λ.

5. Пусть G — подгруппа в S_m, а H — подгруппа в S_n, так что $G \sim H$ есть подгруппа в сплетении $S_m \sim S_n \subset S_{mn}$. Тогда цикловый индикатор (пример 9 § 2) подгруппы $G \sim H$ равен

$$c(G \sim H) = c(H) \circ c(G)$$

6*. Явные формулы для плетизмов $h_r \circ h_2$, $h_r \circ e_2$, $e_r \circ h_2$, $e_r \circ e_2$ можно вывести из разложений в ряды в примерах 5 и 9 § 5:

(a) $h_r \circ h_2 = \sum_\mu s_\mu$, где сумма берется по всем *четным* разбиениям μ числа $2r$ (т. е. разбиениям, все части которых четны);

(b) $h_r \circ e_2 = \sum_\mu s_{\mu'}$, где сумма, как и в (a), берется по четным разбиениям μ;

(c) $e_r \circ e_2 = \sum_\pi s_\pi$, где сумма берется по разбиениям $\pi = (\alpha_1 - 1, \ldots \ldots, \alpha_p - 1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ в обозначениях Фробениуса, причем $\alpha_1 > \ldots \ldots > \alpha_p > 0$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = r$;

(d) $e_r \circ h_2 = \sum_\pi s_{\pi'}$, где сумма берется по тем же разбиениям π, что и в (c).

7*. Обозначим плетизм $p_r \circ h_n$ через $h_n^{(r)}$, так что $h_n^{(r)}(x_1, x_2, \ldots) = = h_n\left(x_1^r, x_2^r, \ldots\right)$, а это равняется коэффициенту при t^{nr} в произведении

$$\prod_{i \geqslant 1} \left(1 - x_i^r t^r\right)^{-1} = \prod_{i \geqslant 1} \prod_{j=1}^{r} \left(1 - x_i \omega^j t\right)^{-1},$$

где $\omega = e^{2\pi i/r}$. В силу 4.3 это произведение равняется

$$\sum_\mu s_\mu(x)\, s_\mu\left(1, \omega, \ldots, \omega^{r-1}\right) t^{|\mu|}.$$

Но, как мы знаем из примера 17 § 3,

$$s_\mu\left(1, \omega, \ldots, \omega^{r-1}\right) = \begin{cases} \sigma_r(\mu), & \text{если } l(\mu) \leqslant r \text{ и } \mu \underset{r}{\sim} 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\sigma_r(\mu) = \pm 1$. Отсюда вытекает, что

$$p_r \circ h_n = \sum_{\mu} \sigma_r(\mu) s_\mu,$$

где сумма берется по разбиениям μ, удовлетворяющим условиям $|\mu| = nr$, $l(\mu) \leqslant r$ и $\mu \underset{r}{\sim} 0$

8*. Более общим образом, для всех разбиений ρ обозначим плетизм $p_\rho \circ h_n$ через $h_n^{(\rho)}$, так что $h_n^{(\rho)} = \prod_{j \geqslant 1} (p_{\rho_j} \circ h_n) = \prod_{j \geqslant 1} h_n^{\rho_j}$ есть коэффициент при одночлене $t^{n\rho} = t_1^{n\rho_1} t_2^{n\rho_2} \ldots$ в произведении

$$\prod_{i,j} \left(1 - x_i^{\rho_j} t_j^{\rho_j}\right)^{-1} = \prod_{i,j} \prod_{k=1}^{\rho_j} \left(1 - x_i \omega_j^k t_j\right)^{-1}, \tag{1}$$

где $\omega_j = \exp(2\pi i/\rho_j)$. В силу (4.3) это произведение равняется

$$\sum_{\mu} s_\mu(x) s_\mu(t_1\omega_1, \ldots, t_m\omega_m), \tag{2}$$

где сумма берется по разбиениям μ длины $\leqslant |\rho|$, число m равно $l(\rho)$, а через $t_j\omega_j$ обозначена последовательность $\left(t_j \omega_j^k\right)_{1 \leqslant k \leqslant \rho_j}$.

В силу (5.11) справедливо равенство

$$s_\mu(t_1\omega_1, \ldots, t_m\omega_m) = \sum \prod_{j=1}^{m} t_j^{|\nu^{(j)} - \nu^{(j-1)}|} s_{\nu^{(j)}/\nu^{(j-1)}}(\omega_j), \tag{3}$$

где суммирование идет по всем последовательностям разбиений $(\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(m)})$, таким, что $0 = \nu^{(0)} \subset \nu^{(1)} \subset \ldots \subset \nu^{(m)} = \mu$.

Наконец, (пример 26(b) § 5),

$$s_{\nu^{(j)}/\nu^{(j-1)}}(\omega_j) = \begin{cases} \sigma_{\rho_j}(\nu^{(j)}/\nu^{(j-1)}) = \pm 1, & \text{если } \nu^{(j)} \underset{\rho_j}{\approx} \nu^{(j-1)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

С помощью формул (1)—(4) мы можем выделить коэффициент при каждой s_μ в $h_n^{(\rho)}$. Результат можно сформулировать следующим образом: определим *обобщенную таблицу* типа ρ, формы μ и веса $n\rho = (n\rho_1, n\rho_2, \ldots)$ как последовательность разбиений $T = (\nu^{(0)}, \ldots, \nu^{(m)})$, где $m = l(\rho)$, такую, что

(i) $0 = \nu^{(0)} \subset \nu^{(1)} \subset \ldots \subset \nu^{(m)} = \mu$;

(ii) $|\nu^{(j)} - \nu^{(j-1)}| = n\rho_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$;

(iii) $\nu^{(j)} \underset{\rho_j}{\approx} \nu^{(j-1)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$

(если $\rho = (1^m)$, то это обычные таблицы веса (n^m)). Для каждой такой таблицы положим $\sigma(T) = \prod_{j=1}^{m} \sigma_{\rho_j}(\nu^{(j)}/\nu^{(j-1)}) = \pm 1$; положим также $K_{\mu, n\rho}^{(\rho)} = \sum_T \sigma(T)$, где сумма берется по всем обобщенным таблицам T типа ρ, формы μ и веса $n\rho$ (целые числа $K_{\mu, n\rho}^{(\rho)}$ могут рассматриваться как обобщенные числа Костки (§ 6)).

В этих терминах мы доказали, что

$$p_\rho \circ h_n = h_n^{(\rho)} = \sum_\mu K_{\mu,\, n\rho}^{(\rho)} s_\mu,$$

где суммирование идет по разбиениям μ, таким, что $|\mu| = n|\rho|$ и $l(\mu) \leqslant |\rho|$.

9*. Так как

$$s_\lambda = \sum_\rho z_\rho^{-1} \chi_\rho^\lambda p_\rho,$$

то из примера 8 вытекает, что

$$s_\lambda \circ h_n = \sum_\rho z_\rho^{-1} \chi_\rho^\lambda (p_\rho \circ h_n) = \sum_\mu \left(\sum_\rho z_\rho^{-1} \chi_\rho^\lambda K_{\mu,\, n\rho}^{(\rho)} \right) s_\mu,$$

где сумма берется по разбиениям μ, таким, что $|\mu| = n|\lambda|$ и $l(\mu) \leqslant |\lambda|$.

(a) Если $|\lambda| = 2$, то мы получаем (пример 7), что $h_n^{(2)} = \sum\limits_\mu \sigma_2(\mu) s_\mu$, где сумма берется по разбиениям μ с $|\mu| = 2n$, $l(\mu) \leqslant 2$, так что $\mu = (2n - j, j)$; легко видеть, что $\sigma_2(2n - j, j) = (-1)^j$, и, следовательно,

$$h_n^{(2)} = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_{(2n-j,\, j)}.$$

С другой стороны, $h_n^{(1^2)} = h_n^2 = \sum\limits_{j=0}^n s_{(2n-j,\, j)}$, а значит,

$$h_2 \circ h_n = \sum_{j \text{ четно}} s_{(2n-j,\, j)}, \qquad e_2 \circ h_n = \sum_{j \text{ нечетно}} s_{(2n-j,\, j)}.$$

По двойственности (пример 1) отсюда вытекает, что

$$h_2 \circ e_n = \sum_{k \text{ четно}} s_{(n+k,\, n-k)'}, \qquad e_2 \circ e_n = \sum_{k \text{ нечетно}} s_{(n+k,\, n-k)'}.$$

(b) Если $|\lambda| = 3$, то мы получаем:

$$K_{\mu\,(n^3)}^{(1^3)} = \text{число таблиц формы } \mu \text{ и веса } (n^3) = 1 + m(\mu),$$

где $m(\mu) = \min(\mu_1 - \mu_2,\, \mu_2 - \mu_3)$ (и $l(\mu) \leqslant 3$).

Далее, поскольку $h_n^{(3)} \equiv h_n^3 \pmod 3$, то $K_{\mu\,(3n)}^{(3)} \equiv 1 + m(\mu) \pmod 3$; а так как $K_{\mu\,(3n)}^{(3)}$ равно 0 или $\sigma_3(\mu)$, т. е. 0 или ± 1, то это сравнение однозначно определяет $K_{\mu\,(3n)}^{(3)}$.

Наконец, $h_n^{(21)} = h_n^{(2)} h_n = \sum\limits_{j=0}^n (-1)^j s_{(2n-j,\, j)} h_n$, откуда мы получаем, что

$$K_{\mu\,(2n,\, n)}^{(21)} = \begin{cases} 0, & \text{если } m(\mu) \text{ нечетно}, \\ (-1)^{\mu_2}, & \text{если } m(\mu) \text{ четно}. \end{cases}$$

Используя эти значения, мы получаем, что

$$h_3 \circ h_n = \sum_{\mu} \left(\left[\frac{1}{6}\, m(\mu) \right] + \varepsilon(\mu) \right) s_{\mu},$$

$$s_{(21)} \circ h_n = \sum_{\mu} \left\{ \frac{1}{3}\, m(\mu) \right\} s_{\mu},$$

$$e_3 \circ h_n = \sum_{\mu} \left(\left[\frac{1}{6}\, m(\mu) \right] + \varepsilon(\mu) - (-1)^{\mu_2} \right) s_{\mu}$$

(суммы берутся по разбиениям, удовлетворяющим условиям $|\mu| = 3n$ и $l(\mu) \leqslant 3$), где

$$\varepsilon(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } m(\mu) \text{ и } \mu_2 \text{ четны, либо если } m(\mu) \equiv 3 \text{ или } 5 \ (\mathrm{mod}\, 6), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а $\{x\} = -[-x]$ — это наименьшее целое число $\geqslant x$.

10*. Фулкс высказал гипотезу, что при $m \leqslant n$ выполняется неравенство $h_m \circ h_n \leqslant h_n \circ h_m$ (по отношению к частичному порядку на Λ, определенному в примере 8 § 7). Результаты примеров 6 и 9(a) показывают, что это верно при $m = 2$ и всех $n \geqslant 2$.

Замечания и библиографические указания

Плетизм был введен Литтлвудом [29]. То, что мы обозначаем через $s_\lambda \circ s_\mu$, он обозначает через $\{\mu\} \otimes \{\lambda\}$. Многие авторы вычислили (или описали алгоритмы для вычисления) $s_\lambda \circ s_\mu$ при различных частных значениях λ или μ. За информацией об их работах мы отсылаем читателя к библиографиям в книгах Литтлвуда [29] и Робинсона [40].

Примеры 9(a) и 9(b) принадлежат Троллу [37*]. Результаты, относящиеся к следующему случаю ($|\lambda| = 4$), см. [33*].

9. Правило Литтлвуда — Ричардсона

Если μ и ν — разбиения, то произведение $s_\mu s_\nu$ есть целочисленная линейная комбинация S-функций:

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda,$$

или, что эквивалентно,

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu} s_\nu. \tag{9.1}$$

Коэффициенты $c^\lambda_{\mu\nu}$ являются неотрицательными целыми числами, так как в силу (7.3) и (7.5) $c^\lambda_{\mu\nu} = \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \cdot \chi^\nu \rangle$ есть кратность характера χ^λ в характере $\chi^\mu \cdot \chi^\nu$; кроме того, $c^\lambda_{\mu\nu} = 0$, за исключением случая, когда $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ и $\mu, \nu \subset \lambda$.

Этот раздел посвящен формулировке и доказательству комбинаторного правила для вычисления $c^{\lambda}_{\mu\nu}$, принадлежащего Литтлвуду и Ричардсону [28].

Пусть T — таблица. Читая символы в ней справа налево (как по-арабски) в последовательных строках, начиная с верхней строки, мы получим из T *слово* (или последовательность) $w(T)$. Например, если T есть таблица

	1	1	2	3
	2	3		
1	4			

то $w(T)$ есть слово 32113241.

Если слово w получается таким образом из некоторой таблицы формы $\lambda - \mu$, мы будем говорить, что слово w *совместимо с* $\lambda - \mu$.

Слово $w = a_1 a_2 \ldots a_N$ из символов $1, 2, \ldots, n$ называется *решетчатой перестановкой*, если для всех $1 \leqslant r \leqslant N$ и $1 \leqslant i \leqslant n-1$ число вхождений символа i в $a_1 a_2 \ldots a_r$ не меньше, чем число вхождений $i+1$.

Теперь мы в состоянии сформулировать правило Литтлвуда — Ричардсона:

(9.2) *Пусть λ, μ, ν — разбиения. Тогда коэффициент $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ равен числу таблиц T формы $\lambda - \mu$ и веса ν, таких, что слово $w(T)$ является решетчатой перестановкой.*

Наше доказательство (9.2) опирается на следующее утверждение. Для всех разбиений λ, μ, π, таких, что $\lambda \supset \mu$, обозначим через $\mathrm{Tab}(\lambda - \mu, \pi)$ множество всех таблиц T формы $\lambda - \mu$ и веса π, а через $\mathrm{Tab}^0(\lambda - \mu, \pi)$ — его подмножество, состоящее из таких таблиц T, что $w(T)$ есть решетчатая перестановка. В силу (5.14)

$$(9.3) \qquad |\mathrm{Tab}(\lambda - \mu, \pi)| = K_{\lambda-\mu,\pi} = \langle s_{\lambda/\mu}, h_\pi \rangle.$$

Мы докажем, что

(9.4) *Существует биекция*

$$\mathrm{Tab}(\lambda - \mu, \pi) \rightleftarrows \coprod_{\nu} (\mathrm{Tab}^0(\lambda - \mu, \nu) \times \mathrm{Tab}(\nu, \pi)).$$

Прежде чем доказывать (9.4), выведем из него утверждение (9.2). В силу (9.4) и (9.3)

$$\langle s_{\lambda/\mu}, h_\pi \rangle = \sum_{\nu} |\mathrm{Tab}^0(\lambda - \mu, \nu)| \langle s_\nu, h_\pi \rangle$$

для всех разбиений π, и, следовательно,

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} |\operatorname{Tab}^0(\lambda - \mu, \nu)| s_\nu.$$

Сравнение этого тождества с (9.1) показывает, что $c^{\lambda}_{\mu\nu} = |\operatorname{Tab}^0(\lambda - \mu, \nu)|$.

При построении биекции, требуемой в (9.4), мы будем следовать методу Литтлвуда и Робинсона [39], состоящему в том, что мы начинаем с таблицы T формы $\lambda - \mu$ и последовательно модифицируем ее до тех пор, пока слово $w(T)$ не станет решетчатой перестановкой, и при этом одновременно строим таблицу M, служащую для регистрации последовательности сделанных изменений.

Если $w = a_1 a_2 \ldots a_N$ — произвольное слово из символов $1, 2, \ldots$, то обозначим через $m_r(w)$ число вхождений символа r в w. При $1 \leqslant p \leqslant N$ и $r \geqslant 2$ разность $m_r(a_1 \ldots a_p) - m_{r-1}(a_1 \ldots a_p)$ называется *r-индексом* члена a_p в w. Заметим, что w является решетчатой перестановкой в том и только в том случае, когда все его индексы $\leqslant 0$.

Пусть m — максимальное значение r-индексов слова w; предположим, что $m > 0$. Возьмем первый элемент в w, на котором достигается этот максимум (ясно, что на этом месте будет стоять символ r), и заменим его на $r - 1$. Обозначим результат этой операции через $S_{r-1,r}(w)$ (подстановка $r - 1$ вместо r). Заметим, что максимальный r-индекс слова $S_{r-1,r}(w)$ равен $m - 1$ (кроме случая $m = 1$, когда он может быть равен -1).

(9.5) *Операция $S_{r-1,r}$ взаимно однозначна.*

Доказательство. Пусть $w' = S_{r-1,r}(w)$. Чтобы восстановить w по w', рассмотрим максимальный r-индекс m' слова w'. Если $m' \geqslant 0$, то возьмем последний символ в w' с r-индексом m' и превратим следующий за ним символ (который должен равняться $r - 1$) в r. Если $m' < 0$, то слово w' должно начинаться символом $r - 1$ и мы превратим его в r. В обоих случаях получится слово w, которое, таким образом, однозначно определяется по w' и r. ∎

(9.6) *Пусть $w' = S_{r-1,r}(w)$. Тогда слово w' совместимо с косой диаграммой $\lambda - \mu$ в том и только в том случае, когда w совместимо с $\lambda - \mu$.*

Доказательство. Пусть $w = w(T)$, $w' = w(T')$, где T и T' — массивы формы $\lambda - \mu$. Они различаются только одним квадратом, скажем x, в котором в T стоит число r, а в T' — число $r - 1$.

Предположим, что T является таблицей. Если T' — не таблица, то имеются две возможности: либо (a) квадрат y непо-

средственно слева от x занят в T числом r, либо (b) квадрат непосредственно над x занят числом $r-1$.

В случае (a) символ r в квадрате y должен обладать бо́льшим r-индексом, чем символ r в квадрате x, что невозможно. В случае (b) квадрат x в T будет левым концом цепочки из, скажем, s квадратов, занятых символом r, и непосредственно над этой цепочкой будет цепочка из s квадратов, занятых символом $r-1$. Отсюда следует, что слово $w(T)$ содержит отрезок вида

$$(r-1)^s \dots r^s,$$

где ненаписанные символы, лежащие между двумя нашими цепочками, все либо $<r-1$, либо $>r$; слово w' получается заменой последнего символа r в этом отрезке на $r-1$. Но тогда r-индекс этого символа r равен r-индексу элемента слова w, непосредственно предшествующего нашему отрезку, что снова невозможно. Значит, если T — таблица, то и T' — также таблица.

Обратная импликация доказывается аналогично с помощью полученного в (9.5) правила для обратного перехода от w' к w. ∎

Предположим теперь, что слово w является решетчатой перестановкой по отношению к $(1, 2, \dots, r-1)$, но не является ею по отношению к $(r-1, r)$, или, другими словами, что все s-индексы $\leqslant 0$ при $2 \leqslant s \leqslant r-1$, а при $s = r$ это неверно. Мы будем использовать операцию $S_{r-1,r}$ только в этой ситуации. При замене в слове w символа r на $r-1$ в соответствии с $S_{r-1,r}$ оно может перестать быть решетчатой перестановкой по отношению к $(r-2, r-1)$, т. е. некоторые $(r-1)$-индексы могут стать равными $+1$. В этом случае мы применим операцию $S_{r-2,r-1}$ и получим слово

$$S_{r-2,r}(w) = S_{r-2,r-1}S_{r-1,r}(w).$$

На этом шаге все $(r-1)$-индексы будут $\leqslant 0$, но могут появиться некоторые $(r-2)$-индексы, равные $+1$, и т. д. В конце концов этот процесс завершится, скажем, на слове

$$S_{a,r}(w) = S_{a,a+1} \dots S_{r-1,r}(w)$$

для некоторого a, такого, что $1 \leqslant a \leqslant r-1$; это слово $S_{a,r}(w)$ снова является решетчатой перестановкой по отношению к $(1, 2, \dots, r-1)$, а его максимальный r-индекс строго меньше, чем у w.

На этом этапе решающую роль играет следующая лемма:

(9.7) *Если каждое из слов w, $S_{a,r}(w) = w'$ и $S_{b,r}(w') = w''$ является решетчатой перестановкой по отношению к $(1, 2, \dots, r-1)$, то $b \leqslant a$.*

Доказательство. Пусть $w = x_1x_2x_3 \ldots$. Нам придется подробно изучить процесс перехода от w к w'. Он начинается с применения операции $S_{r-1,\,r}$, т. е. с замены первого символа r в w, имеющего r-индекс m, где m есть максимум всех r-индексов, на $r-1$. Предположим, это происходит в члене x_{p_0}. Тогда при $s \geqslant 1$ $(r-1)$-индекс члена x_s остается неизменным, если $s < p_0$, и увеличивается на 1, если $s \geqslant p_0$. Таким образом, элемент, на который действует операция $S_{r-2,\,r-1}$, находится на p_1-м месте, где p_1 есть первое целое число $\geqslant p_0$, для которого $(r-1)$-индекс члена x_{p_1} в w равен 0. Аналогично элемент, на который действует операция $S_{r-3,\,r-2}$, находится на p_2-м месте, где p_2 есть первое целое число $\geqslant p_1$, для которого $(r-2)$-индекс члена x_{p_2} равен 0, и т. д.

Таким образом, мы получаем последовательность

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_{r-a-1}$$

с тем свойством, что при всех $i \geqslant 1$ x_{p_i} есть первый элемент в слове, не предшествующий $x_{p_{i-1}}$, чей $(r-i)$-индекс равен 0. Заметим, что в слове w' элемент на p_i-м месте по-прежнему имеет $(r-i)$-индекс нуль при всех $i \geqslant 1$ (хотя он уже не будет первым с этим свойством).

Рассмотрим теперь переход от слова $w' = y_1y_2y_3 \ldots$ к слову w''. Максимальный r-индекс в w' равен $m-1$ (по предположению он еще положителен) и впервые встречается, скажем, на элементе y_{q_0}, где $q_0 < p_0$ (это верно, потому что при переходе к соседнему элементу r-индекс по своему определению может меняться только на единицу, и, следовательно, r-индекс $m-1$ впервые встречается в w на некотором элементе, предшествующем x_{p_0}; но в w' элементы, предшествующие p_0-му, те же, что и в w). В w' $(r-1)$-индекс элемента y_{p_1} есть нуль, следовательно, в $S_{r-1,\,r}(w')$ он равен $+1$. Значит, к слову $S_{r-1,\,r}(w')$ применима операция $S_{r-2,\,r-1}$, которая будет действовать на элемент на q_1-м месте, где q_1 — первое целое число $\geqslant q_0$, для которого $(r-1)$-индекс y_{q_1} в w' есть 0, так что $q_0 \leqslant q_1 < p_1$. Продолжая таким же образом, мы получим последовательность

$$q_0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_{r-a-1}$$

с $q_i < p_i$ для всех $i \geqslant 0$ и убедимся, что к слову w' применима операция $S_{a,\,r}$.

Если $S_{a,\,r}(w') = w''$, то $b = a$; если нет, то к слову $S_{a,\,r}(w')$ применимы дальнейшие операции $S_{a-1,\,a}, \ldots$, пока не будет достигнуто слово $w'' = S_{b,\,r}(w')$, так что в этом случае $b < a$. В обоих случаях $b \leqslant a$, что и требуется. ∎

Опишем теперь алгоритм Литтлвуда и Робинсона, который по таблице T формы $\lambda-\mu$ и веса π, где λ, μ, π — произвольные разбиения, строит пару (L, M), где $L \in \mathrm{Tab}^0(\lambda-\mu, \nu)$ для некоторого разбиения ν, а $M \in \mathrm{Tab}(\nu, \pi)$.

Если A — произвольный массив (не обязательно таблица), а a, r — положительные целые числа, такие, что $a < r$, то обозначим через $R_{a,r}(A)$ массив, получающийся, если поднять самый правый элемент r-й строки массива A и приставить его к правому концу a-й строки.

Алгоритм начинает свою работу со слова $w_1 = w(T)$ и массива M_1, состоящего из π_1 единиц в первой строке, π_2 двоек во второй строке и т. д. (т. е. M_1 есть единственная таблица формы π и веса π).

Будем применять к слову w_1 операцию S_{12} до тех пор, пока не исчезнут все положительные 2-индексы, одновременно применяя к M_1 то же число раз оператор R_{12}: мы получим, скажем,

$$w_2 = S_{12}^m(w_1), \quad M_2 = R_{12}^m(M_1).$$

Далее, будем применять к w_2 операции S_{23} и S_{13}, как описано выше, пока не исчезнут все положительные 2- и 3-индексы, одновременно применяя к M_2 соответствующие операторы R_{23} или R_{13}: скажем

$$w_3 = \ldots S_{a_2,3} S_{a_1,3}(w_2), \quad M_3 = \ldots R_{a_2,3} R_{a_1,3}(M_2),$$

где каждое из a_1, a_2 есть 1 или 2.

Будем продолжать таким же образом, пока не дойдем до пары (w_l, M_l), где $l = l(\pi)$. Из нашей конструкции ясно, что w_l есть решетчатая перестановка. Из (9.6) вытекает, что слово w_l совместимо с $\lambda-\mu$, так что $w_l = w(L)$, где $L \in \mathrm{Tab}^0(\lambda-\mu, \nu)$ для некоторого разбиения ν. Далее, из конструкции ясно, что на каждом шагу длина $l_i(M_r)$ i-й строки массива M_r равна кратности $m_i(w_r)$ символа i в соответствующем слове w_r, так что последний массив $M = M_l$ имеет форму ν и вес π.

Нам нужно, далее, показать, что M_l является *таблицей*. Для этого докажем с помощью индукции по r, что первые r строк массива M_r образуют таблицу. Это ясно при $r = 1$, так что предположим, что $r > 1$ и что наше утверждение верно для $r-1$.

Рассмотрим шаги, ведущие от M_{r-1} к M_r: скажем,

$$M_r = R_{a_m,r} \ldots R_{a_1,r}(M_{r-1});$$

положим

$$M_{r-1,i} = R_{a_i,r} \ldots R_{a_1,r}(M_{r-1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant m),$$

и аналогично

$$w_{r-1,i} = S_{a_i,r} \ldots S_{a_1,r}(w_{r-1}),$$

где все слова $w_{r-1,\,i}$ являются решетчатыми перестановками по отношению к $(1, 2, \ldots, r-1)$. Каждый массив $M_{r-1,\,i}$ получается из своего предшественника $M_{r-1,\,i-1}$ (или из M_{r-1}, если $i=1$) перемещением единственного символа r из r-й строки в a_i-ю строку. В силу нашей конструкции при всех $j \geqslant 1$ длина $l_j(M_{r-1,\,i})$ j-й строки массива $M_{r-1,\,i}$ равна кратности $m_j(w_{r-1,\,i})$ символа j в слое $w_{r-1,\,i}$; поскольку все слова $w_{r-1,\,i}$ являются решетчатыми перестановками по отношению к $(1, 2, \ldots, r-1)$, отсюда следует, что

$$l_1(M_{r-1,\,i}) \geqslant \ldots \geqslant l_{r-1}(M_{r-1,\,i}).$$

Кроме того, в силу (9.7) числа a_i удовлетворяют условию $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_m$ Отсюда вытекает, что ни на каком шагу два символа r не могут появиться в одном столбце и, следовательно, первые r строк массива M_r образуют таблицу.

Таким образом, наш алгоритм порождает отображение

$$\mathrm{Tab}(\lambda - \mu, \pi) \to \coprod_{\nu} \mathrm{Tab}^0(\lambda - \mu, \nu) \times \mathrm{Tab}(\nu, \pi).$$

Для завершения доказательства (9.4) осталось показать, что это отображение есть биекция. Для этого достаточно показать, что при всех $r \geqslant 1$ мы можем однозначно проследить наши шаги в обратном направлении от (w_r, M_r) к (w_{r-1}, M_{r-1}). В использованных выше обозначениях

$$w_r = S_{a_m,\,r} \ldots S_{a_1,\,r}(w_{r-1}),$$

причем последовательность $(a_1, \ldots, a_m)$ может быть найдена по массиву M_r, поскольку числа a_i — это расположенные в убывающем порядке $(a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$ в силу (9.7)) номера, меньшие r, тех строк, в которых в массиве M_r находятся символы r. Так как в силу (9.5) преобразования $S_{a,\,r}$ обратимы, то пара (w_{r-1}, M_{r-1}) однозначно определяется по (w_r, M_r). Наконец, в силу (9.6) если w_r совместимо с $\lambda - \mu$, то w_{r-1} также совместимо с $\lambda - \mu$, что завершает доказательство.

Замечание. Решетчатую перестановку $w = a_1 a_2 \ldots a_N$ веса ν можно описать с помощью стандартной таблицы $T(w)$ формы ν, в которой при $1 \leqslant r \leqslant N$ символ r стоит в r-й строке (решетчатость w обеспечивает, что $T(w)$ есть таблица). Таким образом, описанный выше алгоритм строит по слову w пару таблиц $T(w_l)$ и M_l одинаковой формы ν, первая из которых стандартна, а вторая имеет вес π. Можно проверить, что этот алгоритм совпадает с алгоритмом, описанным Бержем [7] (см. также [13]).

Замечания и библиографические указания

Правило Литтлвуда — Ричардсона (9.2) было впервые сформулировано, но не доказано Литтлвудом и Ричардсоном в [28] (с. 119). В доказательстве, впоследствии опубликованном Робинсоном [39] и воспроизведенном в книге Литтлвуда ([29], с. 94—96), имеются пробелы, которые мы попытались заполнить в приведенном доказательстве. По-видимому, лишь недавно были впервые опубликованы полные доказательства этого правила, принадлежащие Ласку и Шютценберже [46] и Томасу [53] [1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ: ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ФУНКТОРЫ

A1. Введение

Пусть k — поле характеристики 0; обозначим через $\mathfrak{V}$ категорию, объектами которой являются конечномерные векторные пространства над k, а морфизмами — k-линейные отображения. Будем называть (ковариантный) функтор $F\colon \mathfrak{V}\to\mathfrak{V}$ *полиномиальным функтором*, если для любой пары векторных k-пространств X, Y отображение $F\colon \mathrm{Hom}(X, Y)\to \mathrm{Hom}(FX, FY)$ есть полиномиальное отображение. Это условие можно выразить следующим образом:

(A1.1) *Пусть $f_i\colon X\to Y$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ — морфизмы в $\mathfrak{V}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$. Тогда $F(\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_r f_r)$ есть полиномиальная функция от $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ с коэффициентами в* $\mathrm{Hom}(FX, FY)$ *(зависящая от $f_1, \ldots, f_r$).*

Если при всех выборах $f_1, \ldots, f_r$ функция $F(\lambda_1 f_1+\ldots$ $\ldots+\lambda_r f_r)$ однородна степени n, то функтор F называется *однородным степени n*. Например, n-я внешняя степень Λ^n и n-я симметрическая степень S^n являются однородными полиномиальными функторами степени n.

Каждый полиномиальный функтор F есть прямая сумма $\bigoplus_{n\geqslant 0} F_n$, где F_n однороден степени n (§ 2 ниже). Мы покажем, что каждый функтор F_n определяет представление симметрической группы S_n в конечномерном векторном k-пространстве E_n, такое, что

$$F_n(X)\cong (E_n\otimes X^{\otimes n})^{S_n}$$

функториально по X и что отображение $F_n\mapsto E_n$ определяет эквивалентность категории однородных полиномиальных

[1]) Другие формулировки, доказательства и различные обобщения этого правила даны работах [3°], [11°], [2°], [12°], [21°], [22°], [23°]. — *Прим. перев.*

функторов степени n с категорией конечномерных $k[S_n]$-модулей. В частности, неприводимые полиномиальные функторы соответствуют неприводимым представлениям симметрических групп, а значит, параметризуются разбиениями.

Связь с симметрическими функциями состоит в следующем. Пусть u: $k^m \to k^m$ — полупростой эндоморфизм с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (лежащими в некотором расширении поля k). Тогда след эндоморфизма $F(u)$ есть симметрическая полиномиальная функция от $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, скажем $\chi_m(F)(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, где $\chi_m(F) \in \Lambda_m$. При $m \to \infty$ функции $\chi_m(F)$ определяют элемент $\chi(F) \in \Lambda$. Если $F = F_\mu$ неприводим (где μ — разбиение), то окажется, что $\chi(F_\mu)$ есть S-функция s_μ.

Обозначение. Если $X \in \mathfrak{V}$ и $\lambda \in k$, то умножение на λ в X мы будем обозначать через λ_X (или, если позволяет контекст, просто λ).

A2. Однородность

Пусть F — полиномиальный функтор на $\mathfrak{V}$, а $\lambda \in k$. В силу (A1.1) $F(\lambda_X)$ есть полиномиальная функция от λ с коэффициентами в $\operatorname{End}(F(X))$, скажем

$$F(\lambda_X) = \sum_{n \geqslant 0} u_n(X)\lambda^n. \tag{A2.1}$$

Поскольку $F((\lambda\mu)_X) = F(\lambda_X\mu_X) = F(\lambda_X)F(\mu_X)$, то

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n(X)(\lambda\mu)^n = \Big(\sum_{n \geqslant 0} u_n(X)\lambda^n\Big)\Big(\sum_{n \geqslant 0} u_n(X)\mu^n\Big)$$

для всех $\lambda, \mu \in k$, и, следовательно (так как k — бесконечное поле), $u_n(X)^2 = u_n(X)$ при всех $n \geqslant 0$ и $u_m(X)u_n(X) = 0$ при $m \neq n$. Кроме того, беря $\lambda = 1$ в (A2.1), мы получаем

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n(X) = F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

Отсюда вытекает, что эндоморфизмы $u_n(X)$ определяют разложение в прямую сумму

$$F(X) = \bigoplus_{n \geqslant 0} F_n(X), \tag{A2.2}$$

где $F_n(X)$ есть образ эндоморфизма $u_n(X)$: $F(X) \to F(X)$. Поскольку пространство $F(X)$ конечномерно, то для каждого данного X все, кроме конечного числа, слагаемые $F_n(X)$ в (A2.2) будут нулевыми.

Более того, если f: $X \to Y$ есть k-линейное отображение, то $f\lambda_X = \lambda_Y f$ для всех $\lambda \in k$, откуда $F(f)F(\lambda_X) = F(\lambda_Y)F(f)$. Из (A2.1) вытекает, что $F(f)u_n(X) = u_n(Y)F(f)$ для всех $n \geqslant 0$,

так что все u_n являются эндоморфизмами функтора F. Значит, при ограничении оператор $F(f)$ определяет k-линейные отображения $F_n(f)\colon F_n(X)\to F_n(Y)$, и, следовательно, все F_n являются *функторами*, причем, очевидно, полиномиальными. Таким образом, получаем прямое разложение

$$F=\bigoplus_{n\geqslant 0} F_n, \tag{A2.3}$$

в котором каждый F_n есть однородный полиномиальный функтор степени n.

Замечания. 1. В прямой сумме (A2.3) вполне может быть бесконечно много ненулевых компонент, хотя для каждого данного $X\in\mathfrak{V}$ должно быть $F_n(X)=0$ для всех достаточно больших n. Примером служит функтор внешней алгебры $\bigwedge$.

Если $F_n=0$ для всех достаточно больших n, то будем говорить, что функтор F имеет *ограниченную степень*.

2. Компонента F_0 однородна степени 0, так что $F_0(\lambda)=1$ для всех $\lambda\in k$ и, в частности, $F_0(0)=F_0(1)$. Отсюда следует, что для всех морфизмов $f\colon X\to Y$ отображение $F_0(f)$ равно $F_0(0)$, а значит, не зависит от f и является изоморфизмом между $F_0(X)$ и $F_0(Y)$. Таким образом, все объекты $F_0(X)$ канонически изоморфны между собой.

Более общим образом, пусть r — положительное целое число, а $\mathfrak{V}^r=\mathfrak{V}\times\ldots\times\mathfrak{V}$ — категория, объектами которой являются последовательности $X=(X_1,\ldots,X_r)$ длины r из объектов $\mathfrak{V}$, а $\operatorname{Hom}(X,Y)=\prod_i \operatorname{Hom}(X_i,Y_i)$. Как и выше, будем называть функтор $F\colon \mathfrak{V}^r\to\mathfrak{V}$ *полиномиальным*, если отображение $F\colon \operatorname{Hom}(X,Y)\to\operatorname{Hom}(FX,FY)$ является полиномиальным для всех $X, Y\in\mathfrak{V}^r$. Если функтор F полиномиален, а $(\lambda)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in k^r$, то $F((\lambda)_X)=F((\lambda_1)_{X_1},\ldots,(\lambda_r)_{X_r})$ будет полиномиальной функцией от $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ с коэффициентами в $\operatorname{End}(F(X))$, скажем

$$F((\lambda)_X)=\sum_{m_1,\ldots,m_r} u_{m_1\ldots m_r}(X_1,\ldots,X_r)\,\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_r^{m_r}. \tag{A2.4}$$

В точности как и выше, мы видим, что все $u_{m_1\ldots m_r}$ являются эндоморфизмами функтора F и что если обозначить через $F_{m_1\ldots m_r}(X_1,\ldots,X_r)$ образ $u_{m_1\ldots m_r}(X_1,\ldots,X_r)$, то все $F_{m_1\ldots m_r}$ будут подфункторами F, порождающими прямое разложение

$$F=\bigoplus_{m_1,\ldots,m_r} F_{m_1\ldots m_r}. \tag{A2.5}$$

Каждая компонента $F_{m_1\ldots m_r}$ однородна мультистепени $(m_1,\ldots,m_r)$, т. е. $F_{m_1\ldots m_r}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)=\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_r^{m_r}$.

А3. Линеаризация

Рассмотрим снова полиномиальный функтор F: $\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$. Ввиду разложения (А2.3) мы будем в дальнейшем предполагать, что F *однороден* степени $n > 0$. Рассмотрения в конце § А2, примененные к функтору F': $\mathfrak{V}^n \to \mathfrak{V}$, заданному формулой $F'(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n)$, показывают, что существует функториальное по каждому переменному разложение в прямую сумму

$$F(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n) = \bigoplus F'_{m_1 \ldots m_n}(X_1, \ldots, X_n),$$

где прямая сумма справа берется по всем $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, таким, что $m_1 + \ldots + m_n = n$.

Нас будет главным образом интересовать функтор $F'_{1 \ldots 1}$, являющийся образом морфизма $u_{1 \ldots 1}$. Будем для краткости писать L_F и v вместо $F'_{1 \ldots 1}$ и $u_{1 \ldots 1}$. Назовем L_F *линеаризацией* функтора F; это однородный функтор степени 1 по каждой переменной.

Вновь обращаясь к определениям L_F и v, положим $Y = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Тогда имеются мономорфизмы i_α: $X_\alpha \to Y$ и эпиморфизмы p_α: $Y \to X_\alpha$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant n)$, удовлетворяющие условиям

(А3.1) $$p_\alpha i_\alpha = 1_{X_\alpha}, \quad p_\alpha i_\beta = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad \sum_\alpha i_\alpha p_\alpha = 1_Y.$$

Для всех $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$ обозначим через $(\lambda)_Y$ или просто (λ) морфизм $\sum \lambda_\alpha i_\alpha p_\alpha$: $Y \to Y$, так что на компоненте X_α морфизм (λ) действует умножением на скаляр λ_α. Тогда $v(X_1, \ldots, X_n)$ по определению есть коэффициент при $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ в $F((\lambda)_Y)$, а пространство $L_F(X_1, \ldots, X_n)$ — это образ $v(X_1, \ldots, X_n)$, причем оно является прямым слагаемым в $F(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n)$.

(А3.2) *Пример.* Если F есть n-я внешняя степень Λ^n, то

$$F(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n) \cong \bigoplus_{m_1, \ldots, m_n} \Lambda^{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_n}(X_n),$$

где суммирование ведется по всем $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, таким, что $m_1 + \ldots + m_n = n$; отсюда $L_F(X_1, \ldots, X_n) \cong X_1 \otimes \ldots \otimes X_n$.

А4. Действие симметрической группы

Пусть, как и выше, F однороден степени $n > 0$; положим

$$L_F^{(n)}(X) = L_F(X, \ldots, X).$$

Для каждого элемента s симметрической группы S_n обозначим через s_X или просто s морфизм $\sum i_{s(\alpha)}p_\alpha$: $X^n \to X^n$, где $X^n = X \oplus \ldots \oplus X$, так что s_X переставляет слагаемые в X^n. В силу (A3.1) для всех $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$

$$s_X(\lambda) = \sum_\alpha \lambda_\alpha i_{s(\alpha)} p_\alpha = (s\lambda)\, s_X,$$

где $s\lambda = (\lambda_{s^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{s^{-1}(n)})$, откуда

(A4.1) $$F(s)\, F((\lambda)) = F((s\lambda))\, F(s).$$

Беря в обеих частях коэффициент при $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, мы видим, что

(A4.2) $$F(s)\, v = vF(s),$$

откуда следует, что $F(s)$ определяет с помощью ограничения эндоморфизм $\tilde{F}(s)$ функтора $L_F^{(n)}$. Явным образом, если

(A4.3) $$j = j_X\colon L_F^{(n)}(X) \to F(X^n), \quad q = q_X\colon F(X^n) \to L_F^{(n)}(X)$$

— вложение и проекция, соответствующие прямому слагаемому $L_F^{(n)}(X)$ в $F(X^n)$, так что $qj = 1$ и $jq = v$, то

(A4.4) $$\tilde{F}(s) = qF(s)\, j.$$

Из (A4.2) и (A4.4) вытекает, что $\tilde{F}(st) = \tilde{F}(s)\tilde{F}(t)$ при $s, t \in S_n$, так что соответствие $s \mapsto \tilde{F}(s)$ есть представление группы S_n в векторном пространстве $L_F^{(n)}(X)$, функториальное по X.

Покажем теперь, что это представление S_n определяет функтор F с точностью до изоморфизма, а точнее что имеется функториальный изоморфизм между $F(X)$ и подпространством S_n-инвариантных векторов в $L_F^{(n)}(X)$.

Пример. В примере (A3.2) $L_F^{(n)}(X) = \mathrm{T}^n(X)$ есть n-я тензорная степень X над k, а действие S_n на $L_F^{(n)}(X)$ в этом случае дается формулой

$$\tilde{F}(s)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \varepsilon(s)\, x_{s^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{s^{-1}(n)},$$

где $\varepsilon(s)$ — знак перестановки $s \in S_n$. Значит, $L_F^{(n)}(X)^{S_n}$ есть пространство кососимметрических тензоров в $\mathrm{T}^n(X)$, которое изоморфно $\Lambda^n(X)$, так как k имеет характеристику 0.

Пусть $i = \sum i_\alpha$: $X \to X^n$, $p = \sum p_\alpha$: $X^n \to X$. Тогда

(A4.5) $$vF(ip)\, v = \sum_{s \in S_n} F(s)\, v.$$

Доказательство. Рассмотрим линейные преобразования f: $X^n \to X^n$ вида $f = \sum_{\alpha, \beta} \xi_{\alpha\beta} i_\alpha p_\beta$ с $\xi_{\alpha\beta} \in k$; тогда $F(f)$ будет од-

нородным многочленом степени n от n^2 переменных $\xi_{\alpha\beta}$ с коэффициентами из $\operatorname{End}(F(X^n))$, зависящими только от X (и от F). Для каждого $s \in S_n$ обозначим через w_s коэффициент при $\xi_{s(1)1} \ldots \xi_{s(n)n}$ в $F(f)$.

В силу (A4.2) $F(s)v = vF(s)v$ (поскольку $v^2 = v$), откуда следует, что $F(s)v$ — это коэффициент при $\lambda_1 \ldots \lambda_n \mu_1 \ldots \ldots \mu_n$ в

$$F((\lambda))\,F(s)\,F((\mu)) = F((\lambda)\,s\,(\mu)) = F\left(\sum_\alpha \lambda_{s(\alpha)}\mu_\alpha i_{s(\alpha)} p_\alpha\right),$$

и, значит, $F(s)v = w_s$.

С другой стороны, $vF(ip)v$ есть коэффициент при $\lambda_1 \ldots \lambda_n \mu_1 \ldots \mu_n$ в

$$F((\lambda))\,F(ip)\,F((\mu)) = F((\lambda)\,ip\,(\mu)) = F\left(\sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta i_\alpha p_\beta\right),$$

и этот коэффициент, очевидно, равен

$$\sum_{s \in S_n} w_s = \sum_s F(s)\,v. \ \blacksquare$$

Определим теперь два морфизма функторов:

$$\xi = qF(i)\colon\ F \to L_F^{(n)}, \qquad \eta = F(p)\,j\colon\ L_F^{(n)} \to F.$$

(A4.6) *Имеем* $\eta\xi = n!$ (т. е. $\eta\xi$ — умножение на скаляр $n!$) *и* $\xi\eta = \sum\limits_{s \in S_n} \widetilde{F}(s)$.

Доказательство. $\eta\xi = F(p)\,jqF(i) = F(p)\,vF(i)$ есть коэффициент при $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ в $F(p)F((\lambda))F(i) = F(p(\lambda)i)$. Далее, оператор $p(\lambda)i\colon X \to Y$ — это умножение на скаляр $\lambda_1 + \ldots \ldots + \lambda_n$, так что $F(p(\lambda)i)$ есть умножение на $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^n$, а значит, коэффициент при $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ в нем равен $n!$.

Далее, $\xi\eta = qF(i)F(p)\,j$, так что в силу (A4.3) и (A4.5) имеем

$$j\xi\eta q = vF(ip)\,v = \sum_s F(s)\,v,$$

откуда в силу (A4.4) $\xi\eta = \sum\limits_s qF(s)\,j = \sum\limits_s \widetilde{F}(s)$. $\blacksquare$

Обозначим через $L_F^{(n)}(X)^{S_n}$ подпространство S_n-инвариантных векторов в $L_F^{(n)}(X)$. Из (A4.6) вытекает, что морфизм $\sigma = (n!)^{-1}\xi\eta$ идемпотентен, а его образ есть $L_F^{(n)}(X)^{S_n}$. Пусть

$$\varepsilon\colon\ L_F^{(n)}(X)^{S_n} \to L_F^{(n)}(X), \qquad \pi\colon\ L_F^{(n)}(X) \to L_F^{(n)}(X)^{S_n}$$

— соответствующие вложение и проекция, так что $\pi\varepsilon = 1$ и $\varepsilon\pi = \sigma$. Из (A4.6) непосредственно получаем

(A4.7) *Морфизмы*

$$\xi' = \pi\xi\colon\ F(X) \to L_F^{(n)}(X)^{S_n}, \qquad \eta' = \eta\varepsilon\colon\ L_F^{(n)}(X)^{S_n} \to F(X)$$

являются функториальными изоморфизмами, такими, что $\xi'\eta' = n!$ *и* $\eta'\xi' = n!$.

А5. Классификация полиномиальных функторов

Из (A4.7) вытекает, что однородные полиномиальные функторы степени n имеют вид $X \mapsto L(X, \ldots, X)^{S_n}$, где функтор $L\colon \mathfrak{B}^n \to \mathfrak{B}$ однороден степени 1 по каждой переменной. Следующим шагом, таким образом, является нахождение всех таких функторов.

Мы начнем со случая $n = 1$, так что $L\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ будет однородным степени 1. Из (A1.1) ясно, что L аддитивен: $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$.

(A5.1) *Существует функториальный изоморфизм* $L(X) \cong L(k) \otimes X$.

Доказательство. Для каждого $x \in X$ обозначим через $e(x)\colon k \to X$ отображение $\lambda \mapsto \lambda x$. Для всех векторных k-пространств Y определим отображение

$$\psi_X\colon \operatorname{Hom}(L(X), Y) \to \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Hom}(L(k), Y))$$

формулой $\psi_X(f)(x) = f \circ L(e(x))$. Ясно, что ψ_X функториально по X, и для доказательства (A5.1) достаточно показать, что ψ_X — изоморфизм.

Поскольку L аддитивен, то $L(X_1 \oplus X_2) \cong L(X_1) \oplus L(X_2)$. Отсюда следует, что если ψ_{X_1} и ψ_{X_2} — изоморфизмы, то $\psi_{X_1 \oplus X_2}$ также изоморфизм. Значит, достаточно проверить, что ψ_k есть изоморфизм, а это очевидно. ∎

Пусть теперь функтор $L\colon \mathfrak{B}^n \to \mathfrak{B}$ однороден и линеен по всем переменным.

(A5.2) *Существует функториальный изоморфизм*

$$L(X_1, \ldots, X_n) \cong L^{(n)}(k) \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_n,$$

где $L^{(n)}(k) = L(k, \ldots, k)$.

Доказательство. Повторно применяя (A5.1), мы видим, что

$$\begin{aligned} L(X_1, \ldots, X_n) &\cong L(X_1, \ldots, X_{n-1}, k) \otimes X_n \cong \\ &\cong L(X_1, \ldots, X_{n-2}, k, k) \otimes X_{n-1} \otimes X_n \cong \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\cong L(k, \ldots, k) \otimes X_1 \otimes X_2 \otimes \ldots \otimes X_n. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Из (A5.2) и (A4.7) сразу вытекает

(A5.3) *Пусть F — однородный полиномиальный функтор степени n. Тогда существует изоморфизм функторов*

$$F(X) \cong \left(L_F^{(n)}(k) \otimes \mathsf{T}^n(X)\right)^{S_n},$$

где $\mathsf{T}^n(X) = X \otimes \ldots \otimes X$ *есть n-я тензорная степень X.* ∎

Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ категорию однородных полиномиальных функторов степени n, а через $\mathfrak{B}_{S_n}$ — категорию конечномерных $k[S_n]$-модулей.

(A5.4) *Функторы* $\alpha\colon \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{B}_{S_n}$, $\beta\colon \mathfrak{B}_{S_n} \to \mathfrak{F}_n$, *определяемые формулами*

$$\alpha(F) = L_F^{(n)}(k), \quad \beta(M)(X) = \left(M \otimes \mathrm{T}^n(X)\right)^{S_n},$$

задают эквивалентность категорий.

Доказательство. В силу (A5.3) $\beta\alpha \cong 1_{\mathfrak{F}_n}$; осталось проверить, что $\alpha\beta \cong 1_{\mathfrak{B}_{S_n}}$. Если $M \in \mathfrak{B}_{S_n}$ и $\beta(M) = F$, то $F(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n) = (M \otimes \mathrm{T}^n(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n))^{S_n}$ и, следовательно,

$$L_F(X_1, \ldots, X_n) = \Big(M \otimes \Big(\bigoplus_{s \in S_n} X_{s(1)} \otimes \ldots \otimes X_{s(n)}\Big)\Big)^{S_n}.$$

Отсюда

$$\alpha\beta(M) = L_F^{(n)}(k) \cong (M \otimes k[S_n])^{S_n} \cong M. \ \blacksquare$$

Мы видим, что функторы α и β устанавливают взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма однородных полиномиальных функторов степени n и классами изоморфизма конечномерных $k[S_n]$-модулей.

В частности, неприводимые полиномиальные функторы (которые в силу (A2.3) обязательно однородны) соответствуют неприводимым представлениям симметрических групп S_n, а значит, естественно параметризуются разбиениями. Для всех разбиений λ числа n обозначим через F_λ неприводимый полиномиальный функтор, соответствующий $k[S_n]$-модулю с характером χ^λ.

A6. Полиномиальные функторы и $k[S_n]$-модули

Нам понадобятся следующие факты. Пусть G, H — конечные группы, M — конечномерный $k[G]$-модуль, а N — конечномерный $k[H]$-модуль. Тогда $M \otimes N$ есть $k[G \times H]$-модуль, и

(A) $$M^G \otimes N^H = (M \otimes N)^{G \times H}$$

как подпространства в $M \otimes N$.

Предположим теперь, что H — подгруппа в G; пусть $\mathrm{ind}_H^G N = k[G] \otimes_{k[H]} N$ есть $k[G]$-модуль, индуцированный модулем N, а $\mathrm{res}_G^H M$ — это модуль M, рассматриваемый как $k[H]$-модуль посредством ограничения скаляров. Тогда

(B) $$N^H \cong \left(\mathrm{ind}_H^G N\right)^G.$$

Это частный случай двойственности Фробениуса:

$$\mathrm{Hom}_{k[H]}\left(\mathrm{res}_G^H M,\ N\right) \cong \mathrm{Hom}_{k[G]}\left(M,\ \mathrm{ind}_H^G N\right),$$

где в качестве M взят тривиальный одномерный $k[G]$-модуль.

Снова предположим, что H есть подгруппа в G. Тогда

(C) $$\operatorname{ind}_H^G (N \otimes \operatorname{res}_G^H (M)) \cong (\operatorname{ind}_H^G N) \otimes M.$$

В самом деле, обе части канонически изоморфны $k[G] \otimes_{k[H]} N \otimes_k M$.

Наконец, предположим, что H — нормальная подгруппа в G, M — конечномерный $k[G]$-модуль, а L — конечномерный $k[G/H]$-модуль, а значит, $k[G]$-модуль, на котором H действует тривиально. Тогда

(D) $$(L \otimes M^H)^{G/H} = (L \otimes M)^G$$

как подпространства в $L \otimes M$.

В самом деле, $L \otimes M^H = (L \otimes M)^H$ (так как H действует на L тривиально), откуда

$$(L \otimes M^H)^{G/H} = ((L \otimes M)^H)^{G/H} = (L \otimes M)^G.$$

Пусть теперь E, F — однородные полиномиальные функторы степеней m и n соответственно. Тогда $E \otimes F \colon X \mapsto E(X) \otimes F(X)$ — однородный полиномиальный функтор степени $m+n$, а значит, как описано в § А5, он соответствует некоторому представлению группы S_{m+n}.

Предположим, что в обозначениях (А5.4) $E = \beta(M)$, $F = \beta(N)$. Тогда

$$\begin{aligned}(E \otimes F)(X) &= (M \otimes \mathsf{T}^m(X))^{S_m} \otimes (N \otimes \mathsf{T}^n(X))^{S_n} \cong \\ &\cong (M \otimes N \otimes \mathsf{T}^{m+n}(X))^{S_m \times S_n} \text{ (в силу (A))} \cong \\ &\cong \left(\operatorname{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (M \otimes N) \otimes \mathsf{T}^{m+n}(X)\right)^{S_{m+n}} \text{ (в силу (B) и (C))},\end{aligned}$$

так что функтор $E \otimes F$ соответствует $k[S_{m+n}]$-модулю

(А6.1) $$M \cdot N = \operatorname{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (M \otimes N),$$

называемому *произведением-индуцированием* модулей M и N.

Поскольку тензорные произведения коммутативны и ассоциативны с точностью до изоморфизма, теми же свойствами обладает произведение-индуцирование.

Рассмотрим, далее, композицию полиномиальных функторов. Если E, F такие же, как выше, то

$$\begin{aligned}(E \circ F)(X) &= E((N \otimes \mathsf{T}^n(X))^{S_n}) = (M \otimes \mathsf{T}^m((N \otimes \mathsf{T}^n(X))^{S_n}))^{S_m} \cong \\ &\cong \left(M \otimes (\mathsf{T}^m(N) \otimes \mathsf{T}^{mn}(X))^{S_n^m}\right)^{S_m} \text{ (в силу (A))},\end{aligned}$$

где $S_n^m = S_n \times \ldots \times S_n$ рассматривается как подгруппа в S_{mn}. Далее нормализатор S_n^m в S_{mn} есть полупрямое произведение $S_n^m \rtimes S_m$, в котором S_m действует на S_n^m перестанов-

ками сомножителей: это *сплетение групп* S_n и S_m, обозначаемое через $S_n \sim S_m$. Используя (D), мы видим, что

$$(E \circ F)(X) \cong \left(M \otimes \mathsf{T}^m(N) \otimes \mathsf{T}^{mn}(X)\right)^{S_n \sim S_m} \cong$$
$$\cong \left(\mathrm{ind}_{S_n \sim S_m}^{S_{mn}} (M \otimes \mathsf{T}^m(N)) \otimes \mathsf{T}^{mn}(X)\right)^{S_{mn}}$$

в силу (B) и (C). Отсюда следует, что функтор $E \circ F$ соответствует $k[S_{mn}]$-модулю

(A6.2) $$M \circ N = \mathrm{ind}_{S_n \sim S_m}^{S_{mn}} \left(M \otimes \mathsf{T}^m(N)\right),$$

называемому *композицией* или *плетизмом* (§ 8 гл. I) модулей M и N. Плетизм линеен по M:

(A6.3) $$(M_1 \oplus M_2) \circ N \cong (M_1 \circ N) \oplus (M_2 \circ N)$$

и дистрибутивен по отношению к произведению-индуцированию:

(A6.4) $$(M_1 \circ N) \cdot (M_2 \circ N) \cong (M_1 \cdot M_2) \circ N.$$

В самом деле, соответствующим соотношением для функторов является

$$(E_1 \circ F) \otimes (E_2 \circ F) = (E_1 \otimes E_2) \circ F,$$

что очевидно.

A7. Характеристическое отображение

Для любой абелевой категории $\mathfrak{A}$ обозначим через $K(\mathfrak{A})$ ее группу Гротендика.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ категорию полиномиальных функторов на $\mathfrak{B}$ ограниченной степени (§ A2). Из (A2.3) и (A5.4) вытекает, что категория $\mathfrak{F}$ абелева и полупроста и что

$$K(\mathfrak{F}) \cong \bigoplus_{n \geqslant 0} K(\mathfrak{F}_n) \cong \bigoplus_{n \geqslant 0} K\left(\mathfrak{B}_{S_n}\right).$$

Более того, $K\left(\mathfrak{B}_{S_n}\right) = R^n$ в обозначениях § 7 гл. I.

Тензорное произведение (§ A6) определяет на $K(\mathfrak{F})$ структуру коммутативного ассоциативного градуированного кольца с единицей. Ввиду (A6.1) эта структура согласуется со структурой кольца на $R = \bigoplus R^n$, определенной в § 7 гл. I, так что можно отождествить $K(\mathfrak{F})$ с R.

Группа $K(\mathfrak{F})$ наделена также скалярным произведением. Если E, F — полиномиальные функторы, то $\mathrm{Hom}(E, F)$ есть конечномерное векторное k-пространство, и мы полагаем

$$\langle E, F \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}(E, F).$$

Вновь используя (A5.4), мы видим, что это скалярное произведение совпадает со скалярным произведением на R, определенным в § 7 гл. I.

Дадим теперь внутреннее описание характеристического отображения ch: $R \to \Lambda$, определенного в § 7 гл. I. Пусть F — полиномиальный функтор на $\mathfrak{V}$. Для всех $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in k^r$ обозначим, как и выше, через (λ) диагональный эндоморфизм k^r с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Тогда $\operatorname{trace} F((\lambda))$ есть полиномиальная функция от $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, являющаяся в силу (A4.1) *симметрической*:

$$\operatorname{trace} F((s\lambda)) = \operatorname{trace} F(s(\lambda)s^{-1}) =$$
$$= \operatorname{trace} F(s) F((\lambda)) F(s)^{-1} = \operatorname{trace} F((\lambda))$$

для всех $s \in S_r$. Поскольку след аддитивен, он определяет отображение

$$\chi_r\colon K(\mathfrak{F}) \to \Lambda_r,$$

а именно $\chi_r(F)(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \operatorname{trace} F((\lambda))$, а так как след мультипликативен по отношению к тензорным произведениям, то χ_r есть гомоморфизм градуированных колец. Более того, из определений ясно, что в обозначениях § 2 гл. I $\chi_r = \rho_{q,r} \circ \chi_q$ при $q \geqslant r$; значит, χ_r при $r \to \infty$ определяет гомоморфизм градуированных колец

(A7.1) $$\chi\colon K(\mathfrak{F}) \to \Lambda.$$

Для того чтобы понять, что этот гомоморфизм совпадает с характеристическим отображением ch: $R \to \Lambda$, определенным в § 7 гл. I, достаточно лишь заметить, что $\chi(\bigwedge^n) = e_n$ и что при соответствии (A5.4) функтор $\bigwedge^n$ соответствует представлению ε_n группы S_n.

Таким образом, из утверждений (7.5) и (7.6) гл. I следует, что

(A7.2) *Если $F_\lambda\colon \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ — неприводимый полиномиальный функтор, соответствующий разбиению λ, то $\chi(F_\lambda)$ есть S-функция s_λ.* ∎

Если F — произвольный полиномиальный функтор, то применение разложения (A2.5) к функтору $F'\colon (X_1, \ldots, X_r) \mapsto F(X_1 \oplus \ldots \oplus X_r)$ показывает, что собственными значениями преобразования $F((\lambda))$ являются одночлены $\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_r^{m_r}$ а соответствующими собственными подпространствами — подпространства $F'_{m_1 \ldots m_r}(k, \ldots, k)$, и, следовательно,

$$\chi_r(F) = \sum_{m_1, \ldots, m_r} \dim F'_{m_1 \ldots m_r}(k, \ldots, k)\, x_1^{m_1} \ldots x_r^{m_r}.$$

Отсюда и из определения плетизма в § 8 гл. I вытекает, что

(A7.3) $$\chi(E \circ F) = \chi(E) \circ \chi(F)$$

для любых двух полиномиальных функторов E, F.

В частности, если λ и μ — разбиения, то функтор $F_\lambda \circ F_\mu$ есть прямая сумма неприводимых функторов F_π, так что в $K(\mathfrak{F})$ имеем $F_\lambda \circ F_\mu = \sum_\pi a^\pi_{\lambda\mu} F_\pi$ с целыми неотрицательными коэффициентами $a^\pi_{\lambda\mu}$. Из (A7.2) и (A7.3) вытекает, что

(A7.4) $$s_\lambda \circ s_\mu = \sum_\pi a^\pi_{\lambda\mu} s_\pi$$

с коэффициентами $a^\pi_{\lambda\mu} \geqslant 0$.

°**Замечания переводчика.** 1. Теория полиномиальных функторов, развитая выше, тесно связана с теорией полиномиальных представлений групп GL_n, принадлежащей И. Шуру. Если V — конечномерное векторное пространство над k, то каждый полиномиальный функтор F, очевидно, индуцирует полиномиальное представление группы $GL(V)$ в пространстве $F(V)$. Из теории Шура вытекает, что все полиномиальные представления $GL(V)$ получаются таким образом; в частности, неприводимые полиномиальные представления $GL(V)$ — это в точности представления F_λ с $l(\lambda) \leqslant \dim V$.

2. Многие из результатов гл. I естественно интерпретируются на языке полиномиальных функторов (или представлений групп GL_n). Например, тождество примера 4 § 5 означает, что естественное представление группы $GL(V)$ в пространстве $\mathrm{S}(V \oplus \Lambda^2 V)$ есть прямая сумма всех различных неприводимых полиномиальных представлений группы $GL(V)$.

3. В более общем контексте теория полиномиальных функторов развита в работе автора [14°].°

Глава II

МНОГОЧЛЕНЫ ХОЛЛА

1. Конечные $\mathfrak{o}$-модули

Пусть $\mathfrak{o}$ — (коммутативное) дискретно нормированное кольцо, $\mathfrak{p}$ — его максимальный идеал, а $k = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ — его поле вычетов[1]). В дальнейшем мы потребуем конечности поля k, но пока это ограничение не нужно. Мы будем заниматься *конечными* $\mathfrak{o}$-модулями M, т. е. модулями M, обладающими конечным композиционным рядом, или, что эквивалентно, конечно порожденными $\mathfrak{o}$-модулями M, такими, что $\mathfrak{p}^r M = 0$ для некоторого $r \geqslant 0$. Если поле k конечно, то конечные $\mathfrak{o}$-модули — это в точности модули, состоящие из конечного числа элементов.

Полезно иметь в виду следующие два примера.

(1.1) *Пример.* Пусть p — простое число, а M — конечная абелева p-группа. Тогда $p^r M = 0$ при больших r, так что M можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ при всех больших r, а значит, как модуль над кольцом $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. Соответствующее поле вычетов — это $k = \mathbb{F}_p$.

(1.2) *Пример.* Пусть k — некоторое поле, M — конечномерное векторное пространство над k, а T — нильпотентный эндоморфизм пространства M. Тогда M можно рассматривать как $k[t]$-модуль, где t — независимое переменное, полагая $tx = Tx$ для всех $x \in M$. Поскольку T нильпотентен, то $t^r M = 0$ при достаточно больших r; значит, M можно рассматривать как модуль над кольцом степенных рядов $\mathfrak{o} = k[[t]]$, являющимся дискретно нормированным кольцом с полем вычетов k.

Замечания. 1. В обоих этих примерах кольцо $\mathfrak{o}$ есть *полное* дискретно нормированное кольцо. В общем случае если M является конечным $\mathfrak{o}$-модулем, как в начале раздела, то $\mathfrak{p}^r M = 0$ для всех достаточно больших r, так что M есть $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^r$-модуль, а значит, модуль над $\mathfrak{p}$-адическим пополнением $\hat{\mathfrak{o}}$ кольца $\mathfrak{o}$, имеющим то же поле вычетов k, что и $\mathfrak{o}$. Таким образом, не теряя общности, можно с самого начала предполагать, что $\mathfrak{o}$ полно.

---

[1]) См., например, Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Мир, 1972, гл. 9. — *Прим. перев.*

2. Предположим теперь, что поле k конечно. Полные дискретно нормированные кольца с конечным полем вычетов — это в точности кольца целых чисел $\mathfrak{p}$-адических полей (Бурбаки Н. Коммутативная алгебра, гл. VI, § 9), а $\mathfrak{p}$-адическое поле K есть либо конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (если $\operatorname{char} K = 0$), либо поле формальных степенных рядов $k((t))$ над конечным полем (если $\operatorname{char} K > 0$). Таким образом (при конечном k), два примера (1.1) и (1.2) являются типичными.

3. Все результаты этой главы будут справедливы при более широких предположениях, что $\mathfrak{o}$ есть кольцо целых чисел (т. е. единственный максимальный порядок) алгебры с делением конечного ранга над $\mathfrak{p}$-адическим полем (Deuring, Algebren, Ch. VI, § 11).

Так как $\mathfrak{o}$ — кольцо главных идеалов, то каждый конечно порожденный $\mathfrak{o}$-модуль есть прямая сумма циклических $\mathfrak{o}$-модулей. В применении к конечному $\mathfrak{o}$-модулю M это означает, что M обладает разложением в прямую сумму вида

$$(1.3) \qquad M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_i},$$

где λ_i — положительные целые числа, которые можно считать расположенными в невозрастающем порядке: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_r > 0$. Другими словами, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ есть *разбиение*.

(1.4) *Положим* $\mu_i = \dim_k(\mathfrak{p}^{i-1}M/\mathfrak{p}^iM)$. *Тогда* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ — *разбиение, сопряженное к разбиению* λ.

Доказательство. Пусть x_j — образующая слагаемого $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_j}$ в (1.3), а π — образующая идеала $\mathfrak{p}$. Тогда подмодуль $\mathfrak{p}^{i-1}M$ порожден теми из элементов $\pi^{i-1}x_j$, которые не обращаются в 0, т. е. теми, для которых $\lambda_j \geqslant i$. Отсюда вытекает, что μ_i равно числу индексов j, таких, что $\lambda_j \geqslant i$, и, следовательно, $\mu_i = \lambda'_i$. ∎

Из (1.4) вытекает, что разбиение λ однозначно определяется модулем M, и мы назовем λ его *типом*. Очевидно, что каждое разбиение λ может служить типом и два конечных $\mathfrak{o}$-модуля изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип. Если λ — тип модуля M, то $|\lambda| = \sum \lambda_i$ есть *длина* $l(M)$ этого модуля, т. е. длина композиционного ряда M. Длина является аддитивной функцией от M: это означает, что если

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

— короткая точная последовательность конечных $\mathfrak{o}$-модулей, то

$$l(M') - l(M) + l(M'') = 0.$$

Если N — подмодуль в M, то *котип* N в M по определению есть тип фактормодуля M/N.

Циклические и элементарные модули

Конечный $\mathfrak{o}$-модуль M является *циклическим* (т. е. порожден одним элементом) тогда и только тогда, когда его тип есть разбиение (r), состоящее из единственной части $r = l(M)$; модуль M *элементарен* (т. е. $\mathfrak{p}M = 0$) тогда и только тогда, когда его тип есть (1^r). Если M элементарен типа (1^r), то он является векторным пространством над k, и $l(M) = \dim_k M = r$.

Двойственность

Пусть π — образующая максимального идеала $\mathfrak{p}$. При $m \leqslant n$ умножение на π^{n-m} есть инъективный $\mathfrak{o}$-гомоморфизм модуля $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^m$ в $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^n$. Обозначим через E прямой предел:

$$E = \varinjlim \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^n.$$

Тогда E является инъективным $\mathfrak{o}$-модулем, содержащим $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} = k$, и это «инъективная оболочка» k, т. е. наименьший инъективный $\mathfrak{o}$-модуль, содержащий k в качестве своего подмодуля.

Если теперь M — произвольный конечный $\mathfrak{o}$-модуль, то *двойственный* модуль к M определяется как

$$\hat{M} = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{o}}(M, E).$$

Он является конечным $\mathfrak{o}$-модулем, изоморфным M, и, значит, того же типа, что и M (в самом деле, соответствие $M \longmapsto \hat{M}$ перестановочно с прямыми суммами, так что достаточно проверить, что $\hat{M} \cong M$ для циклических (и конечных) M, а это легко). Поскольку модуль E инъективен, точная последовательность

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

(где N — подмодуль в M) порождает точную последовательность

$$0 \leftarrow \hat{N} \leftarrow \hat{M} \leftarrow (M/N)\hat{} \leftarrow 0,$$

причем $(M/N)\hat{}$ есть аннулятор N^0 модуля N в $\hat{M}$, т. е. множество таких $\xi \in \hat{M}$, что $\xi(N) = 0$. Для всех конечных $\mathfrak{o}$-модулей M естественное отображение $M \to \hat{\hat{M}}$ является изоморфизмом и отождествляет N с N^{00}. Отсюда

(1.5) *Соответствие $N \leftrightarrow N^0$ есть взаимно однозначное соответствие между подмодулями в M и $\hat{M}$, причем оно переводит множество всех $N \subset \hat{M}$ типа ν и котипа μ во множество всех $N^0 \subset \hat{M}$ типа μ и котипа ν.* ∎

Автоморфизмы

Предположим, что поле вычетов k конечно и состоит из q элементов. Если M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль, а x — ненулевой элемент в M, мы скажем, что x имеет *высоту* r, если $\mathfrak{p}^r x = 0$, а $\mathfrak{p}^{r-1}x \neq 0$. Нулевому элементу M приписывается высота 0. Обозначим через M_r подмодуль в M, состоящий из элементов высоты $\leqslant r$, так что M_r есть аннулятор $\mathfrak{p}^r$ в M.

(1.6) *Число автоморфизмов конечного $\mathfrak{o}$-модуля M типа λ равно*

$$a_\lambda(q) = q^{|\lambda| + 2n(\lambda)} \prod_{i \geqslant 1} \varphi_{m_i(\lambda)}(q^{-1}),$$

где, как обычно, $\varphi_m(t) = (1-t)(1-t^2) \ldots (1-t^m)$.

Число автоморфизмов модуля M равно числу последовательностей $(x_1, \ldots, x_r)$ элементов из M, таких, что x_i имеет высоту λ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, и M есть прямая сумма циклических подмодулей $\mathfrak{o}x_i$. Для перечисления таких последовательностей воспользуемся следующей леммой:

(1.7) *Пусть N — подмодуль в M, порожденный элементами высоты $\geqslant r$, и пусть $x \in M$. Тогда следующие условия на x эквивалентны:*

(i) *x имеет высоту r и $\mathfrak{o}x \cap N = 0$;*
(ii) *$x \in M_r - (M_{r-1} + N_r)$.*

Более того, число элементов $x \in M$, удовлетворяющих этим эквивалентным условиям, равно

$$q^{\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_r}\left(1 - q^{\nu'_r - \lambda'_r}\right), \tag{1.8}$$

если тип N равен ν.

Доказательство. Если x удовлетворяет (i), то ясно, что $x \in M_r$. Если $x \in M_{r-1} + N_r$, то $0 \neq \mathfrak{p}^{r-1}x \subset N_r \subset N$, так что $\mathfrak{o}x \cap N \neq 0$, что противоречит предположению. Обратно, если x удовлетворяет (ii), то ясно, что его высота равна r. Если $\mathfrak{o}x \cap N \neq 0$, то $\mathfrak{p}^m x \subset N$ для некоторого $m < r$, следовательно, $\mathfrak{p}^{r-1}x$ содержится в цоколе N_1 модуля N. Поскольку N порожден элементами высоты $\geqslant r$, отсюда следует, что $\mathfrak{p}^{r-1}x = \mathfrak{p}^{r-1}y$ для некоторого $y \in N$; значит, $x - y \in M_{r-1}$ и, таким образом, $x \in (M_{r-1} + N) \cap M_r = M_{r-1} + N_r$.

Имеем $M/M_r \cong \mathfrak{p}^r M$, так что в силу (1.4)

$$l(M_r) = l(M) - l(\mathfrak{p}^r M) = \sum_{i=1}^{r} l(\mathfrak{p}^{i-1}M/\mathfrak{p}^i M) = \lambda_1' + \ldots + \lambda_r'.$$

Кроме того,

$$l(M_{r-1} + N_r) = l(M_{r-1}) + l((M_{r-1} + N_r)/M_{r-1}) =$$
$$= l(M_{r-1}) + l(N_r/N_{r-1}) = \lambda_1' + \ldots + \lambda_{r-1}' + \nu_r',$$

что доказывает (1.8).

Таким образом, число автоморфизмов модуля M есть произведение чисел вида (1.8) по $r = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, где $\nu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$ при $r = \lambda_k$. Нетрудно проверить, что это произведение равно выражению $a_\lambda(q)$, определенному в (1.6).

**Пример*

Для любых разбиений λ, μ обозначим через $\lambda\mu$ разбиение, части которого равны $\lambda_i\mu_i$, а через $\lambda \otimes \mu$—разбиение, части которого равны $\min(\lambda_i, \mu_j)$. Покажите, что $(\lambda\mu)' = \lambda' \otimes \mu'$.

Пусть M, N — конечные $\mathfrak{o}$-модули типа λ и μ соответственно. Тогда модуль $M \oplus N$ имеет тип $\lambda \cup \mu$, а каждый из модулей $M \otimes N$ и $\mathrm{Hom}_\mathfrak{o}(M, N)$ имеет тип $\lambda \otimes \mu$.*

2. Алгебра Холла

В этом разделе поле вычетов k кольца $\mathfrak{o}$ будет предполагаться *конечным.*

Пусть λ, $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)}$ — разбиения, а M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ. Определим

$$G^{\lambda}_{\mu^{(1)} \ldots \mu^{(r)}}(\mathfrak{o})$$

как число цепочек подмодулей в M

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0,$$

таких, что при $1 \leqslant i \leqslant r$ модуль M_{i-1}/M_i имеет тип $\mu^{(i)}$. В частности, $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})$ есть число подмодулей N в M типа ν и котипа μ. Так как $l(M) = l(M/N) + l(N)$, то ясно, что

(2.1) $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o}) = 0$, *за исключением случая, когда* $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$.

Филипу Холлу принадлежит идея использования чисел $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})$ в качестве структурных констант некоторого кольца. Пусть $H = H(\mathfrak{o})$ — свободный Z-модуль с базисом (u_λ), параметризованным всеми разбиениями λ. Определим умножение в H с помощью правила

$$u_\mu u_\nu = \sum_\lambda G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})\, u_\lambda.$$

В силу (2.1) сумма справа содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

(2.2) *$H(\mathfrak{o})$ является коммутативным и ассоциативным кольцом с единицей.*

Доказательство. Единичный элемент есть u_0, где 0 — пустое разбиение. Ассоциативность следует из того, что коэффициент при u_λ как в $u_\mu(u_\nu u_\rho)$, так и в $(u_\mu u_\nu)u_\rho$ есть в точности $G^\lambda_{\mu\nu\rho}$. Коммутативность вытекает из предложения (1.5), которое показывает, что $G^\lambda_{\mu\nu}=G^\lambda_{\nu\mu}$. ∎

Кольцо $H(\mathfrak{o})$ называется *алгеброй Холла* кольца $\mathfrak{o}$.

(2.3) *Кольцо $H(\mathfrak{o})$ порождается (как $\mathbf{Z}$-алгебра) элементами $u_{(1^r)}$ $(r\geqslant 1)$, причем они алгебраически независимы над $\mathbf{Z}$.*

Доказательство. Для удобства будем писать v_r вместо $u_{(1^r)}$; для всех разбиений λ рассмотрим произведение

$$v_{\lambda'}=v_{\lambda'_1}v_{\lambda'_2}\ldots v_{\lambda'_s},$$

где $\lambda'=(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_s)$, как обычно, есть разбиение, сопряженное к λ. Это произведение $v_{\lambda'}$ будет линейной комбинацией элементов u_μ, скажем

(1) $$v_{\lambda'}=\sum_\mu a_{\lambda\mu}u_\mu,$$

в которой коэффициент $a_{\lambda\mu}$ по определению равен числу цепочек

(2) $$M=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_s=0$$

в фиксированном конечном $\mathfrak{o}$-модуле M типа μ, таких, что при $1\leqslant i\leqslant s$ модуль M_{i-1}/M_i имеет тип $\left(1^{\lambda'_i}\right)$, т. е. элементарен длины λ'_i. Если такая цепочка (2) существует (т. е. если $a_{\lambda\mu}\neq 0$), то должно быть $\mathfrak{p}M_{i-1}\subset M_i$ $(1\leqslant i\leqslant s)$ и, следовательно, $\mathfrak{p}^iM\subset M_i$ при $1\leqslant i\leqslant s$. Отсюда $l(M/\mathfrak{p}^iM)\geqslant l(M/M_i)$, что с учетом (1.4) дает неравенство $\mu'_1+\ldots+\mu'_i\geqslant\lambda'_1+\ldots$ $\ldots+\lambda'_i$ при $1\leqslant i\leqslant s$. Значит, $\mu'\geqslant\lambda'$ и, следовательно, $\mu\leqslant\lambda$ в силу (1.11) гл. I. Более того, то же рассуждение показывает, что если $\mu=\lambda$, то имеется только одна возможная цепочка (2), а именно $M_i=\mathfrak{p}^iM$.

Итак, $a_{\lambda\mu}=0$, за исключением случая, когда $\mu\leqslant\lambda$, и $a_{\lambda\lambda}=1$. Другими словами, матрица $(a_{\lambda\mu})$ является строго верхней унитреугольной (гл. I, § 6), а значит, уравнения (1) можно решить и выразить элементы u_μ как целочисленные линейные комбинации элементов $v_{\lambda'}$. Отсюда следует, что элементы $v_{\lambda'}$ образуют $\mathbf{Z}$-базис в $H(\mathfrak{o})$, и это доказывает (2.3). ∎

Из (2.3) вытекает, что алгебра Холла $H(\mathfrak{o})$ изоморфна кольцу Λ симметрических функций (гл. I). Напрашивается

выбор изоморфизма, переводящего $u_{(1^r)}$ в r-ю элементарную симметрическую функцию e_r; однако, как мы увидим в следующей главе, более разумно отобразить $u_{(1^r)}$ в $q^{-r(r-1)/2}e_r$, где q — число элементов поля вычетов кольца $\mathfrak{o}$. Таким образом, каждая образующая u_λ в $H(\mathfrak{o})$ отображается в некоторую симметрическую функцию. Мы явно укажем и изучим эти симметрические функции в следующей главе; остаток этой главы будет посвящен вычислению структурных констант $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})$.

3. *LR*-последовательность подмодуля

Пусть T — таблица (гл. I, § 1) формы $\lambda-\mu$ и веса $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_r)$. Тогда она однозначно задается последовательностью разбиений

$$S=(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}),$$

такой, что $\lambda^{(0)}=\mu$, $\lambda^{(r)}=\lambda$ и $\lambda^{(i)}\supset\lambda^{(i-1)}$ при $1\leqslant i\leqslant r$; по определению $\lambda^{(i)}-\lambda^{(i-1)}$ есть косая диаграмма, состоящая из квадратов, занятых в таблице T символом i (и, значит, является горизонтальной полосой, поскольку T — таблица).

Будем называть описанную выше последовательность разбиений S *LR-последовательностью типа* $(\mu, \nu; \lambda)$, если выполняются условия

(LR1) $\lambda^{(0)}=\mu$, $\lambda^{(r)}=\lambda$ и $\lambda^{(i)}\supset\lambda^{(i-1)}$ при $1\leqslant i\leqslant r$;

(LR2) $\lambda^{(i)}-\lambda^{(i-1)}$ есть горизонтальная полоса длины ν_i при всех $1\leqslant i\leqslant r$.

(Эти два условия обеспечивают, что S определяет таблицу T.)

(LR3) Слово $w(T)$, получаемое из T чтением справа налево в последовательных строках, начиная сверху, является решетчатой перестановкой (гл. I, § 9).

Для выполнения условия (LR3) необходимо и достаточно, чтобы при всех $i\geqslant 1$ и $k\geqslant 0$ число символов i в первых k строках T было не меньше, чем число символов $i+1$ в первых $k+1$ строках T. Другими словами, (LR3) эквивалентно условию

$$\text{(LR3}') \qquad \sum_{j=1}^{k}\left(\lambda_j^{(i)}-\lambda_j^{(i-1)}\right)\geqslant\sum_{j=1}^{k+1}\left(\lambda_j^{(i+1)}-\lambda_j^{(i)}\right)$$

для всех $i\geqslant 1$ и $k\geqslant 0$.

В этом разделе мы покажем, что каждый подмодуль N в конечном $\mathfrak{o}$-модуле M порождает некоторую LR-последовательность типа $(\mu', \nu'; \lambda')$, где λ, μ, ν — это соответственно типы M, M/N и N. Доказательство потребует нескольких лемм. Предположение о конечности поля вычетов кольца $\mathfrak{o}$ в этом разделе не понадобится.

(3.1) *Пусть M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а N — подмодуль в M типа ν и котипа μ. Тогда $\mu \subset \lambda$ и $\nu \subset \lambda$.*

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\mathfrak{p}^{i-1}(M/N)}{\mathfrak{p}^{i}(M/N)} \cong \frac{\mathfrak{p}^{i-1}M + N}{\mathfrak{p}^{i}M + N} \cong \frac{\mathfrak{p}^{i-1}M}{\mathfrak{p}^{i-1}M \cap (\mathfrak{p}^{i}M + N)},$$

и, кроме того, $\mathfrak{p}^{i-1}M \cap (\mathfrak{p}^{i}M + N) \supset \mathfrak{p}^{i}M$, то

$$l(\mathfrak{p}^{i-1}(M/N)/\mathfrak{p}^{i}(M/N)) \leqslant l(\mathfrak{p}^{i-1}M/\mathfrak{p}^{i}M),$$

откуда в силу (1.4) $\mu'_i \leqslant \lambda'_i$. Следовательно, $\mu \subset \lambda$. Из двойственности (1.5) вытекает, что и $\nu \subset \lambda$. ∎

Пусть M есть $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а N — элементарный подмодуль в M. Тогда $\mathfrak{p}N = 0$, так что $N \subset S$, где $S = \{x \in M: \mathfrak{p}x = 0\}$ есть *цоколь* модуля M, т. е. единственный максимальный элементарный подмодуль в M.

(3.2) *Модуль M/S имеет тип $\tilde{\lambda} = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots)$.*

Доказательство. Если $M = \bigoplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_i}$, то ясно что $S = \bigoplus \mathfrak{p}^{\lambda_i - 1}/\mathfrak{p}^{\lambda_i}$, откуда $M/S \cong \bigoplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_i - 1}$. ∎

(3.3) *Пусть M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а N — элементарный подмодуль в M котипа μ. Тогда $\lambda - \mu$ является вертикальной полосой (т. е. $\lambda_i - \mu_i = 0$ или 1 для всех i).*

Доказательство. Имеем $N \subset S$, откуда $M/S \cong (M/N)/(S/N)$, и, следовательно, $\tilde{\lambda} \subset \mu \subset \lambda$ в силу (3.1) и (3.2). Значит,

$$0 \leqslant \lambda_i - \mu_i \leqslant \lambda_i - \tilde{\lambda}_i = 1,$$

и, следовательно, $\lambda - \mu$ является вертикальной полосой. ∎

Заметим, что если $\mu \subset \lambda$, то $\lambda - \mu$ является вертикальной полосой тогда и только тогда, когда $\tilde{\lambda} \subset \mu$.

(3.4) *Пусть M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а N — подмодуль в M типа ν и котипа μ. При всех $i \geqslant 0$ пусть $\lambda^{(i)}$ — котип подмодуля $\mathfrak{p}^{i}N$. Тогда последовательность*

$$S(N) = (\lambda^{(0)\prime}, \lambda^{(1)\prime}, \ldots, \lambda^{(r)\prime})$$

(где $\mathfrak{p}^{r}N = 0$) является LR-последовательностью типа $(\mu', \nu'; \lambda')$.

Доказательство. Очевидно, $\lambda^{(0)} = \mu$ и $\lambda^{(r)} = \lambda$; применяя (3.1) к модулю $M/\mathfrak{p}^{i}N$ и подмодулю $\mathfrak{p}^{i-1}N/\mathfrak{p}^{i}N$, мы видим, что $\lambda^{(i)} \supset \lambda^{(i-1)}$. Значит, условие (LR1) выполняется. Так как $\mathfrak{p}^{i-1}N/\mathfrak{p}^{i}N$ — элементарный $\mathfrak{o}$-модуль, то из (3.3) вытекает, что $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ есть вертикальная полоса, а значит, что

$\lambda^{(i)'} - \lambda^{(i-1)'}$ — горизонтальная полоса, длина которой равна $l(\mathfrak{p}^{i-1}N/\mathfrak{p}^i N) = \nu_i'$ (в силу (1.4)). Значит, условие (LR2) также выполняется.

Что касается (LR3′), то

$$\lambda_j^{(i)'} = l(\mathfrak{p}^{j-1}(M/\mathfrak{p}^i N)/\mathfrak{p}^j(M/\mathfrak{p}^i N))$$

(снова в силу (1.4)), так что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(i)'} = l((M/\mathfrak{p}^i N)/\mathfrak{p}^k(M/\mathfrak{p}^i N)) = l(M/(\mathfrak{p}^k M + \mathfrak{p}^i N)),$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^{(i)'} - \lambda_j^{(i-1)'}) = l(V_{ki}),$$

где $V_{ki} = (\mathfrak{p}^k M + \mathfrak{p}^{i-1} N)/(\mathfrak{p}^k M + \mathfrak{p}^i N)$. Аналогично

$$\sum_{j=1}^{k+1} (\lambda_j^{(i+1)'} - \lambda_j^{(i)'}) = l(V_{k+1,\, i+1}).$$

Поскольку умножение на образующую идеала $\mathfrak{p}$ индуцирует гомоморфизм модуля V_{ki} на $V_{k+1,\, i+1}$, то $l(V_{ki}) \geqslant l(V_{k+1,\, i+1})$, откуда вытекает (LR3′). ∎

Пример

Пусть V есть n-мерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k. *Флагом* в V называется последовательность $F = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ подпространств в V, такая, что $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ и $\dim V_i = i$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим через X множество всех флагов в V. Группа $G = GL(V)$ транзитивно действует на X, так что X можно отождествить с G/B, где B — подгруппа, оставляющая на месте данный флаг; таким образом, X есть (неособое проективное) алгебраическое многообразие, называемое *многообразием флагов* в V.

Пусть теперь $u \in G$ — унипотентный эндоморфизм пространства V. Тогда, как и в (1.2), пространство V становится $k[t]$-модулем конечной длины, где t действует на V как нильпотентный эндоморфизм $u - 1$. Пусть λ — тип V, так что λ есть разбиение числа n, описывающее жорданову нормальную форму u, и пусть $X_\lambda \subset X$ — множество всех флагов $F \in X$, инвариантных относительно u. Такие флаги F — это в точности композиционные ряды $k[t]$-модуля V. Множество X_λ является замкнутым подмногообразием в X.

Для каждого $F = (V_0, V_1, \ldots, V_n) \in X_\lambda$ пусть $\lambda^{(i)}$ — котип подмодуля V_{n-i} в V. Тогда в силу (3.1)

$$0 = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(n)} = \lambda$$

и $|\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}| = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, так что флаг F определяет, таким образом, *стандартную таблицу* T формы λ. Значит, мы получаем разбиение многообразия X_λ на подмножества X_T, параметризованные стандартными таблицами T формы λ.

Эти подмножества X_T обладают следующими свойствами (Спалтенштейн [49]):

(а) X_T есть гладкое неприводимое локально замкнутое подмногообразие в X_λ.

(b) $\dim X_T = n(\lambda)$.

(c) X_T представляется в виде дизъюнктного объединения $\bigcup_{j=1}^{m} X_{T,j}$, такого, что каждое $X_{T,j}$ изоморфно аффинному пространству, и $\bigcup_{k\leqslant j} X_{T,k}$ замкнуто в X_T при $j = 1, 2, \ldots, m$.

Из этих результатов вытекает, что замыкания $\bar{X}_T$ подмногообразий X_T суть неприводимые компоненты многообразия X_λ и что все они имеют одну и ту же размерность $n(\lambda)$. Таким образом, число неприводимых компонент равно степени неприводимого характера χ^λ группы S_n (гл. I, § 7).

Если поле k содержит конечное поле $\mathbb{F}_q$ из q элементов, то число $X_\lambda(q)$ $\mathbb{F}_q$-рациональных точек многообразия X_λ равно $Q^\lambda_{(1^n)}(q)$ (гл. III, § 7) [1]).

4. Многочлен Холла

В этом разделе мы вычислим структурные константы $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})$ алгебры Холла. (Как и в § 2, поле вычетов кольца $\mathfrak{o}$ предполагается конечным.) Пусть S — некоторая LR-последовательность типа $(\mu', \nu'; \lambda')$, а M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ. Обозначим через $G_S(\mathfrak{o})$ число подмодулей N в M, для которых соответствующая LR-последовательность $S(N)$ есть S. В силу (3.4) все такие N имеют тип ν и котип μ.

Обозначим через q число элементов поля вычетов кольца $\mathfrak{o}$ и напомним, что $n(\lambda) = \sum (i-1)\lambda_i$ для всех разбиений λ. Тогда

(4.1) *Для каждой LR-последовательности S типа $(\mu', \nu'; \lambda')$ существует многочлен $g_S(t) \in \mathbb{Z}[t]$ степени $n(\lambda) - n(\mu) - n(\nu)$ со старшим коэффициентом* 1, *не зависящий от* $\mathfrak{o}$, *такой, что*

$$g_S(q) = G_S(\mathfrak{o}).$$

(Иными словами, $G_S(\mathfrak{o})$ есть «многочлен от q».)

Положим теперь по определению для любых трех разбиений λ, μ, ν

$$g^\lambda_{\mu\nu}(t) = \sum_S g_S(t), \tag{4.2}$$

где сумма берется по всем LR-последовательностям S типа $(\mu', \nu'; \lambda')$. Этот многочлен называется *многочленом Холла*, отвечающим разбиениям λ, μ, ν. Напомним из гл. I (§ 5 и 9), что $c^\lambda_{\mu\nu}$ обозначает коэффициент при S-функции s_λ в произведении $s_\mu s_\nu$, что $c^\lambda_{\mu\nu} = c^{\lambda'}_{\mu'\nu'}$ и что $c^{\lambda'}_{\mu'\nu'}$ есть число LR-последовательностей типа $(\mu', \nu'; \lambda')$. Тогда из (4.1) вытекает

[1]) Более общие результаты, относящиеся к неполным флагам, содержатся в работах [10°], [17°]. — *Прим. перев.*

(4.3) (i) *Если* $c^\lambda_{\mu\nu}=0$, *то многочлен Холла* $g^\lambda_{\mu\nu}(t)$ *тождественно равен* 0 (*в частности*, $g^\lambda_{\mu\nu}(t)=0$, *за исключением случая, когда* $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$ *и* $\mu,\nu\subset\lambda$).

(ii) *Если* $c^\lambda_{\mu\nu}\neq 0$, *то многочлен* $g^\lambda_{\mu\nu}(t)$ *имеет степень* $n(\lambda)-n(\mu)-n(\nu)$ *и старший коэффициент* $c^\lambda_{\mu\nu}$.

(iii) *В обоих случаях* $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})=g^\lambda_{\mu\nu}(q)$.

(iv) $g^\lambda_{\mu\nu}(t)=g^\lambda_{\nu\mu}(t)$.

Комментариев требует только п. (iv). В силу (2.2) $G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})=G^\lambda_{\nu\mu}(\mathfrak{o})$ для всех $\mathfrak{o}$, откуда $g^\lambda_{\mu\nu}(q)=g^\lambda_{\nu\mu}(q)$ для всех q, являющихся степенями простых чисел, а значит, $g^\lambda_{\mu\nu}(t)=$ $=g^\lambda_{\nu\mu}(t)$. ∎

Исходной точкой в нашем доказательстве (4.1) является следующее предложение:

(4.4) *Пусть M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а N — элементарный подмодуль в M котипа α (так что в силу* (3.3) $\lambda-\alpha$ *есть вертикальная полоса). Пусть β — разбиение, такое, что $\alpha\subset\beta\subset\lambda$; обозначим через $H_{\alpha\beta\lambda}(\mathfrak{o})$ число подмодулей $P\subset N$ котипа β в M. Тогда $H_{\alpha\beta\lambda}(\mathfrak{o})=h_{\alpha\beta\lambda}(q)$, где $h_{\alpha\beta\lambda}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ есть многочлен*

(4.4.1) $$h_{\alpha\beta\lambda}(t)=t^{d(\alpha,\beta,\lambda)}\prod_{i\geqslant 1}[\lambda'_i-\beta'_i,\ \beta'_i-\alpha'_i](t^{-1}),$$

в котором

(4.4.2) $$d(\alpha,\beta,\lambda)=\sum_{r\leqslant s}(\beta_r-\alpha_r)(\lambda_s-\beta_s),$$

а $[r,s]$ — многочлен Гаусса $\begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}$ (*гл.* I, § 2, *пример* 1) *при $r,s\geqslant 0$ и равно нулю в остальных случаях.*

Доказательство. Положим $\theta=\lambda-\beta$, $\varphi=\beta-\alpha$. Пусть также $N_i=N\cap\mathfrak{p}^iM$. Так как

$$\mathfrak{p}^iM/N_i\cong(\mathfrak{p}^iM+N)/N\cong\mathfrak{p}^i(M/N),$$

то в силу (1.4)

$$l(N_i)=l(\mathfrak{p}^iM)-l(\mathfrak{p}^i(M/N))=\sum_{j>i}(\lambda'_j-\alpha'_j),$$

или, что эквивалентно,

(1) $$n_i=l(N_i)=\sum_{j>i}(\theta'_j+\varphi'_j).$$

Пусть теперь P — подмодуль в N, имеющий котип β в M, и пусть $P_i=P\cap\mathfrak{p}^iM=P\cap N_i$. Тогда

$$P/P_i\cong(P+\mathfrak{p}^iM)/\mathfrak{p}^iM$$

и, следовательно,

$$l(P_{i-1})-l(P_i)=l(P/P_i)-l(P/P_{i-1})=$$
$$=l((P+\mathfrak{p}^iM)/\mathfrak{p}^iM)-l((P+\mathfrak{p}^{i-1}M)/\mathfrak{p}^{i-1}M)=$$
$$=l(\mathfrak{p}^{i-1}M/\mathfrak{p}^iM)-l((P+\mathfrak{p}^{i-1}M)/(P+\mathfrak{p}^iM))=$$
$$=\lambda_i'-\beta_i'=\theta_i'$$

в силу (1.4). Обратно, если P — подмодуль в N, такой, что

$$l(P_{i-1}/P_i)=\theta_i' \quad (i\geqslant 1), \tag{2}$$

то предыдущие вычисления показывают, что P имеет котип β в M.

Предположим, что число $i\geqslant 1$ и подмодуль P_i уже даны. Нас интересует число подмодулей P_{i-1} в N_{i-1}, удовлетворяющих условиям (2) и

$$P_{i-1}\cap N_i=P_i. \tag{3}$$

Число последовательностей $x=\left(x_1, \ldots, x_{\theta_i'}\right)$ элементов из N_{i-1}, линейно независимых по модулю N_i, равно

$$\left(q^{n_{i-1}}-q^{n_i}\right)\left(q^{n_{i-1}}-q^{n_i+1}\right)\ldots\left(q^{n_{i-1}}-q^{n_i+\theta_i'-1}\right). \tag{4}$$

Для всех таких последовательностей x подмодуль P_{i-1}, порожденный P_i и x, удовлетворяет (2) и (3). Обратно, каждый такой подмодуль P_{i-1} получается таким образом из любой последовательности x из θ_i' своих элементов, линейно независимых по модулю P_i. Число таких последовательностей равно

$$\left(q^{p_{i-1}}-q^{p_i}\right)\left(q^{p_{i-1}}-q^{p_i+1}\right)\ldots\left(q^{p_{i-1}}-q^{p_i+\theta_i'-1}\right), \tag{5}$$

где

$$p_i=l(P_i)=\sum_{j>i}\theta_j' \tag{6}$$

в силу (2). Таким образом, число подмодулей P_{i-1} в N_{i-1}, удовлетворяющих (2) и (3), есть частное от деления (4) на (5), а именно

$$q^{\theta_i'(n_{i-1}-p_{i-1})}\left[\theta_i',\ \varphi_i'\right](q^{-1}).$$

Беря произведение этих выражений по всем $i\geqslant 1$ и замечая, что $n_{i-1}-p_{i-1}=\sum_{j\geqslant i}\varphi_j'$ (в силу (1) и (6)), мы получаем, что

$$H_{\alpha\beta\lambda}(\mathfrak{o})=q^d\prod_{i\geqslant 1}\left[\lambda_i'-\beta_i',\ \beta_i'-\alpha_i'\right](q^{-1}),\quad \text{где}\quad d=\sum_{i<j}\theta_i'\varphi_j'.$$

Далее, θ'_l — число квадратов в l-м столбце косой диаграммы $\theta=\lambda-\beta$, а $\sum_{j\geqslant l}\varphi'_j$ — число квадратов диаграммы $\varphi=\beta-\alpha$ в том же и следующих столбцах, т. е. в *более высоких строках.* Отсюда следует, что

$$d=\sum_{r\leqslant s}\varphi_r\theta_s=d(\alpha,\ \beta,\ \lambda),$$

и это завершает доказательство (4.4). ∎

Возьмем, в частности, в качестве N в (4.4) цоколь S модуля M, так что в силу (3.2) $\alpha=\tilde{\lambda}$. Тогда $H_{\tilde{\lambda}\beta\lambda}(\mathfrak{o})$ есть число элементарных подмодулей P котипа β в M, так что

$$H_{\tilde{\lambda}\beta\lambda}(\mathfrak{o})=G^{\lambda}_{\beta\,(1^m)}(\mathfrak{o}),$$

где $m=|\lambda-\beta|=|\theta|$. В этом случае $\varphi=\beta-\tilde{\lambda}$, так что $\varphi_i=\beta_i-\lambda_i+1=1-\theta_i$, и, таким образом, показатель $d=d(\tilde{\lambda},\beta,\lambda)$ равен

$$d=\sum_{r\leqslant s}(1-\theta_r)\,\theta_s=\sum_{r<s}(1-\theta_r)\theta_s=\sum_{r<s}\theta_s-\sum_{r<s}\theta_r\theta_s,$$

потому что $\theta_r=\theta_r^2$ для всех r. Так как $\sum\theta_r=m$, то

$$\sum_{r<s}\theta_r\theta_s=\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}\sum\theta_r^2=\frac{1}{2}m(m-1), \tag{4.5}$$

откуда

$$d=\sum(s-1)\theta_s-\frac{1}{2}m(m-1)=n(\lambda)-n(\beta)-n(1^m).$$

Значит, из (4.4) мы получаем формулу

$$G^{\lambda}_{\beta(1^m)}(\mathfrak{o})=q^{n(\lambda)-n(\beta)-n(1^m)}\prod_{i\geqslant 1}\left[\lambda'_i-\beta'_i,\ \beta'_i-\lambda'_{i+1}\right](q^{-1})$$

(поскольку $\tilde{\lambda}'_i=\lambda'_{i+1}$ при всех $i\geqslant 1$). Это верно для любых двух разбиений λ, β, где $m=|\lambda|-|\beta|$ (если $\lambda-\beta$ не является вертикальной полосой, то обе части обращаются в нуль).

Эквивалентным образом, полагая по определению

$$g^{\lambda}_{\beta\,(1^m)}(t)=t^{n(\lambda)-n(\beta)-n(1^m)}\prod_{i\geqslant 1}\left[\lambda'_i-\beta'_i,\ \beta'_i-\lambda'_{i+1}\right](t^{-1}), \tag{4.6}$$

мы получим $g^{\lambda}_{\beta\,(1^m)}(q)=G^{\lambda}_{\beta\,(1^m)}(\mathfrak{o})$.

Следующим шагом в доказательстве (4.1) является

(4.7) *Пусть* $R=(\alpha',\beta',\lambda')$ — *трехчленная LR-последовательность. Тогда существует многочлен* $F_R(t)\in Z[t]$ *степени* $n(\beta)-n(\alpha)-\binom{n}{2}$, *где* $n=|\beta-\alpha|$, *со старшим коэффи-*

циентом 1, *зависящий только от* R *и обладающий следующим свойством: если* M — *конечный* $\mathfrak{o}$-*модуль типа* λ, *а* P — *элементарный подмодуль в* M *котипа* β, *то число подмодулей* N *в* M *котипа* α, *таких, что* $\mathfrak{p}N = P$, *равно* $F_R(q)$.

(Заметим, что когда $\beta = \lambda$ (так что $\lambda - \alpha$ есть вертикальная полоса), то $P = 0$, так что N элементарен, и, следовательно, в этом случае $F_R(t) = g^{\lambda}_{\alpha\,(1^n)}(t)$.)

Доказательство. Пусть Q — подмодуль в P, а γ — его котип в M, так что $\alpha \subset \beta \subset \gamma \subset \lambda$.

Обозначим через $f(P, Q)$ (соответственно через $g(P, Q)$) число подмодулей N в M котипа α, таких, что $N \supset P \supset Q \supset \mathfrak{p}N$ (соответственно $N \supset P \supset Q = \mathfrak{p}N$). Нам нужно вычислить число $g(P, P)$. Но, как мы тут же увидим, число $f(P, Q)$ легко вычисляется, после чего $g(P, Q)$ находится с помощью формулы обращения Мёбиуса [41] [1]).

Прежде всего вычислим $f(P, Q)$. Имеем

$$N \supset P \supset Q \supset \mathfrak{p}N \Leftrightarrow N \supset P \text{ и } N/Q \text{ элементарен} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S \supset N \supset P, \text{ где } S/Q \text{ есть цоколь } M/Q \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N/P \subset S/P.$$

В силу (3.2) S имеет котип $\tilde{\gamma}$ в M, так что, применяя (4.4) к модулю M/P и его элементарному подмодулю S/P, мы получим

(i) $$f(P, Q) = H_{\tilde{\gamma}\alpha\beta}(\mathfrak{o}),$$

если $\tilde{\gamma} \subset \alpha$, т. е. если $\gamma - \alpha$ есть вертикальная полоса, а иначе $f(P, Q) = 0$.

Далее, ясно, что

(ii) $$f(P, Q) = \sum_{R \subset Q} g(P, R)$$

— сумма по всем подмодулям (т. е. векторным подпространствам) R в Q. При фиксированном P и меняющемся $Q \subset P$ уравнения (ii) решаются с помощью обращения Мёбиуса: решение имеет вид

$$g(P, Q) = \sum_{R \subset Q} f(P, R)\,\mu(R, Q),$$

где μ есть функция Мёбиуса решетки подпространств векторного пространства P, задающаяся формулой (цит. выше)

$$\mu(R, Q) = (-1)^d q^{d(d-1)/2},$$

где $d = \dim_k(Q/R)$. Отсюда, в частности, получаем

(iii) $$g(P, P) = \sum_{R \subset P} (-1)^m q^{m(m-1)/2} f(P, R),$$

[1]) См. также [1°]. — *Прим. перев.*

где $m = \dim_k(P/R)$, а суммирование ведется по всем подпространствам R в P. Далее, для всех разбиений δ, таких, что $\beta \subset \delta \subset \lambda$, число подмодулей $R \subset P$ котипа δ в M равно $H_{\beta\delta\lambda}(\mathfrak{o})$. Значит, из (i) и (iii) вытекает, что

(iv) $$g(P, P) = \sum_{\delta} (-1)^m q^{m(m-1)/2} H_{\beta\delta\lambda}(\mathfrak{o})\, H_{\delta\alpha\beta}(\mathfrak{o}),$$

где сумма берется по всем разбиениям δ, таким, что $\beta \subset \delta \subset \lambda$ и $\delta - \alpha$ есть вертикальная полоса, а $m = |\delta - \beta|$. Таким образом, если определить многочлен $F_R(t)$ формулой

(4.8) $$F_R(t) = \sum_{\delta} (-1)^m t^{m(m-1)/2} h_{\beta\delta\lambda}(t)\, h_{\delta\alpha\beta}(t)$$

(суммирование по разбиениям δ, таким, как выше), то из (iv) и (4.4) вытекает, что $g(P, P) = F_R(q)$.

Для завершения доказательства осталось показать, что наш многочлен $F_R(t)$ имеет старший коэффициент 1 и степень $n(\beta) - n(\alpha) - \binom{n}{2}$, где $n = |\beta - \alpha|$.

Степень слагаемого в (4.8), соответствующего δ, равна в силу (4.4.2)

$$d = \frac{1}{2} m(m-1) + \sum_{r \leqslant s} (\varphi_r \psi_s + (1 - \theta_r - \varphi_r)\theta_s),$$

где $\theta = \beta - \alpha$, $\varphi = \delta - \beta$ и $\psi = \lambda - \delta$, а $m = |\varphi|$. Все косые диаграммы θ, φ, ψ являются вертикальными полосами, так что все θ_r, φ_r и ψ_r равны 0 или 1; в частности, в силу (4.5)

$$\frac{1}{2} m(m-1) = \sum_{r \leqslant s} \varphi_r \varphi_s - m,$$

так что

(v) $$d = \sum_{r \leqslant s} \varphi_r (\varphi_s + \psi_s - \theta_s) + \sum_{r \leqslant s} (1 - \theta_r)\theta_s - |\varphi|.$$

Вспомним теперь, что $(\alpha', \beta', \lambda')$ есть LR-последовательность. Из этого следует, что при всех $r \geqslant 1$ число квадратов диаграммы $\beta' - \alpha' = \theta'$, лежащих в столбцах с номерами $\geqslant r$, не меньше, чем число квадратов в тех же столбцах диаграммы $\lambda' - \beta'$: это означает, что

(vi) $$\sum_{s \geqslant r} \theta_s \geqslant \sum_{s \geqslant r} (\varphi_s + \psi_s)$$

при всех $r \geqslant 1$. Из (v) и (vi) следует, что

$$d \leqslant \sum_{r \leqslant s} (1 - \theta_r)\theta_s,$$

причем равенство достигается только при $\varphi = 0$, т. е. при $\delta = \beta$. Значит, старшим членом суммы (4.8) является член

$h_{\beta\alpha\beta}(t) = g^{\beta}_{\alpha\,(1^n)}(t)$, имеющий в силу (4.6) степень $n(\beta) - n(\alpha) - \binom{n}{2}$ и старший коэффициент 1. Это завершает доказательство. ∎

Теперь мы в состоянии быстро завершить доказательство (4.1). Пусть M есть $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а $S = (\lambda^{(0)\prime}, \ldots, \lambda^{(r)\prime})$ — некоторая LR-последовательность типа $(\mu', \nu'; \lambda')$. Пусть N — подмодуль в M, такой, что $S(N) = S$; положим $N_1 = \mathfrak{p}N$. Ясно тогда, что $S(N_1) = (\lambda^{(1)\prime}, \ldots, \lambda^{(r)\prime})$; обозначим эту последовательность, скажем, через S_1. Обратно, если дан подмодуль N_1 в M, такой, что $S(N_1) = S_1$, то, применяя (4.7) к модулю $M/\mathfrak{p}N_1$ и его элементарному подмодулю $N_1/\mathfrak{p}N_1$, мы видим, что число подмодулей N, таких, что $S(N) = S$ и $\mathfrak{p}N = N_1$, равно $F_{R_1}(q)$, где $R_1 = (\lambda^{(0)\prime}, \lambda^{(1)\prime}, \lambda^{(2)\prime})$. Следовательно

$$G_S(\mathfrak{o}) = G_{S_1}(\mathfrak{o}) \,.\, F_{R_1}(q),$$

откуда

$$G_S(\mathfrak{o}) = \prod_{i=1}^{r} F_{R_i}(q),$$

где $R_i = (\lambda^{(i-1)\prime}, \lambda^{(i)\prime}, \lambda^{(i+1)\prime})$ (при $i = r$ мы берем $\lambda^{(r+1)\prime} = \lambda^{(r)\prime}$, так что, как замечено выше, $F_{R_r}(q) = g^{\lambda}_{\alpha\,(1^m)}(q)$, где $\alpha = \lambda^{(r-1)\prime}$, а $m = |\lambda - \alpha|$).

Значит, полагая по определению

$$g_S(t) = \prod_{i=1}^{r} F_{R_i}(t), \tag{4.9}$$

мы получим $g_S(q) = G_S(\mathfrak{o})$; в силу (4.7) многочлен $g_S(t)$ имеет старший коэффициент 1 и степень

$$\sum_{i=1}^{r} \left(n(\lambda^{(i)}) - n(\lambda^{(i-1)}) - \binom{\nu_i'}{2} \right) = n(\lambda) - n(\mu) - n(\nu),$$

что и требовалось доказать.

Только что данное доказательство предоставляет нам явное (хотя и сложное) выражение для многочленов $g^{\nu}_{\mu\nu}(t)$ посредством формул (4.2), (4.4), (4.8) и (4.9). В качестве примера (который понадобится нам в дальнейшем) вычислим $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t)$, когда $\nu = (r)$ есть разбиение, состоящее из единственной части $r = |\lambda - \mu|$ (случай $\nu = (1^r)$ дается формулой (4.6)). Прежде всего:

(4.10) $g^{\lambda}_{\mu\,(r)}(t) = 0$, *за исключением случая, когда* $\lambda - \mu$ *есть горизонтальная полоса длины* r.

Доказательство. Пусть M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ, а N — циклический подмодуль в M котипа μ. Положим $N_i =$

$= N \cap \mathfrak{p}^i M$. Тогда, так как $\mathfrak{p}^i M/N_i \cong (\mathfrak{p}^i M + N)/N \cong \mathfrak{p}^i (M/N)$, то $l(N_{i-1}/N_i) = \lambda'_i - \mu'_i$, а поскольку $\mathfrak{p}N_{i-1} = \mathfrak{p}(N \cap \mathfrak{p}^{i-1}M) \subset \subset N \cap \mathfrak{p}^i M = N_i$, отсюда следует, что $0 \leqslant \lambda'_i - \mu'_i \leqslant l(N_{i-1}/ /\mathfrak{p}N_{i-1})$. Так как модуль N циклический, то N_i также циклический, откуда $l(N_{i-1}/\mathfrak{p}N_{i-1}) \leqslant 1$. Значит, $\lambda'_i - \mu'_i = 0$ или 1 при всех $i \geqslant 1$, и, следовательно, $\lambda - \mu$ есть горизонтальная полоса. Таким образом, если $\lambda - \mu$ не является горизонтальной полосой, то $g^\lambda_{\mu(r)}(q) = 0$ для всех q, являющихся степенями простых чисел, а значит, $g^\lambda_{\mu(r)}(t) = 0$. ∎

Предположим теперь, что $\lambda - \mu$ — горизонтальная r-полоса. Тогда $\lambda' - \mu'$ есть вертикальная r-полоса, и имеется лишь одна LR-последовательность $S = (\lambda^{(0)\prime}, \ldots, \lambda^{(r)\prime})$ типа $(\mu', (1^r); \lambda')$, а именно получаемая последовательным заполнением квадратов вертикальной полосы $\lambda' - \mu'$, начиная сверху. Значит, в силу (4.2) и (4.9)

$$g^\lambda_{\mu(r)}(t) = g_S(t) = \prod_{i=1}^{r} F_{R_i}(t),$$

где $R_i = (\lambda^{(i-1)\prime}, \lambda^{(i)\prime}, \lambda^{(i+1)\prime})$. Таким образом, мы должны вычислить $F_R(t)$, где $R = (\alpha', \beta', \gamma')$ — трехчленная LR-последовательность, в которой косые диаграммы $\theta = \beta - \alpha$ и $\varphi = = \gamma - \beta$ состоят из одного квадрата. В сумме (4.8), определяющей $F_R(t)$, имеется не более двух возможностей для δ, а именно $\delta = \beta$ и $\delta = \gamma$; последнее значение вносит вклад в сумму тогда и только тогда, когда $\gamma - \alpha$ есть вертикальная полоса. Значит,

$$F_R(t) = \begin{cases} h_{\tilde{\beta}\alpha\beta}(t) - h_{\tilde{\gamma}\alpha\beta}(t), & \text{если } \gamma - \alpha \text{ — вертикальная полоса,} \\ h_{\tilde{\beta}\alpha\beta}(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предположим, что квадрат θ лежит в i-й строке и j-м столбце. Из определения (4.4) многочлена h мы видим, что

$$F_R(t) = \begin{cases} t^{i-1}, & \text{если } \theta, \varphi \text{ лежат в последовательных столбцах,} \\ t^{i-1}\left(1 - t^{-m_j}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где во втором случае m_j есть кратность j как части разбиения β (а значит, и γ).

Наконец, если $\gamma = \beta$ (так что $\varphi = 0$), то

$$F_R(t) = t^{i-1}\left(1 - t^{-m_j}\right)/\left(1 - t^{-1}\right)$$

с только что определенными i и m_j. Собирая вместе все эти факты, мы получаем

(4.11) *Пусть $\sigma = \lambda - \mu$ — горизонтальная полоса общей длины r, а J — множество целых чисел $j \geqslant 1$, таких, что $\sigma'_j = 1$ и $\sigma'_{j+1} = 0$. Тогда*

$$g^{\lambda}_{\mu(r)}(t) = \frac{t^{n(\lambda)-n(\mu)}}{1-t^{-1}} \prod_{j \in J} \left(1 - t^{-m_j(\lambda)}\right),$$

где $m_j(\lambda)$ — кратность j в разбиении λ. ∎

Замечания и библиографические указания

Содержание § 1 и 2, а также теорема (4.3) принадлежат Филипу Холлу, который опубликовал лишь сводку результатов своей теории [17]. Содержание § 3, и в частности утверждение (3.4), принадлежит Грину [15]. Теорема (4.1) была впервые доказана ученицей Грина Т. Клейн [21]. Наше доказательство отличается от ее.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Ф. ХОЛЛА[1])

Это приложение посвящено простому доказательству следующего утверждения, чуть более слабого, чем (4.3) (мы будем свободно пользоваться обозначениями и терминологией гл. II):

(AT.1) *Для любых трех разбиений λ, μ и ν существует многочлен $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t) \in Z[t]$, такой, что*

$$G^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathfrak{o}) = g^{\lambda}_{\mu\nu}(q).$$

Степень многочлена $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t)$ не превосходит $n(\lambda) - n(\mu) - n(\nu)$, а коэффициент при $t^{n(\lambda)-n(\mu)-n(\nu)}$ равен $c^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Приводимое ниже доказательство не использует правила Литтлвуда — Ричардсона (гл. I, (9.2)). Тем самым, комбинируя его с рассуждениями § 3, 4 гл. II, мы получим независимое доказательство правила Литтлвуда — Ричардсона, на наш взгляд, делающее более ясной роль решетчатых перестановок.

В основе нашего доказательства лежит комбинаторная интерпретация коэффициентов $a_{\lambda\mu}$ из формулы (1) § 2 гл. II. Введем ряд определений и обозначений.

Композициями будем называть последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ целых неотрицательных чисел, имеющие лишь конечное число ненулевых членов. Таким образом, разбиения — это композиции, удовлетворяющие условию $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots$. На множестве композиций действует группа S_∞ финитных перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$ по формуле

[1]) Добавлено переводчиком.

$s\alpha = \left(\alpha_{s^{-1}(1)}, \alpha_{s^{-1}(2)}, \ldots\right)$. Будем писать $\alpha \sim \beta$, если α и β сопряжены под действием S_∞; очевидно, что каждая орбита S_∞ содержит ровно одно разбиение.

Как и разбиения, композиции изображаются *диаграммами*: диаграмма композиции α формально определяется как множество $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leqslant j \leqslant \alpha_i\}$, а при графическом изображении в i-й строке диаграммы ставится α_i квадратиков.

Если α и β — две композиции, то *массивом формы α и веса* β называется любое заполнение квадратиков диаграммы α натуральными числами, такое, что для всех $i \geqslant 1$ число i стоит в β_i квадратиках (более формально, массив — это функция $A: \alpha \to \mathbb{N}$, такая, что $\operatorname{Card} A^{-1}(i) = \beta_i$ при $i \geqslant 1$; нам будет удобно считать, что функция A задана на всем $\mathbb{N}^2$ и $A(i, j) = +\infty$ при $j > \alpha_i$). Для всех $x = (i, j) \in \mathbb{N}^2$ обозначим точку $(i, j+1)$ через $x^{\rightarrow}$. Массив A назовем *упорядоченным* (соответственно *строго упорядоченным*) по строкам, если $A(x^{\rightarrow}) \geqslant A(x)$ (соответственно $A(x^{\rightarrow}) > A(x)$) для всех $x \in \alpha$. Аналогично определяются упорядоченность и строгая упорядоченность по столбцам.

Введем в $\mathbb{N}^2$ следующее отношение линейного порядка:

$$(i, j) <_L (i', j') \Leftrightarrow \text{либо } j < j', \text{ либо } j = j',\ i > i'.$$

Для каждого массива A формы α, строго упорядоченного по строкам, положим

$$d(A) = \operatorname{Card}\{(x, y) \in \alpha \times \alpha : y <_L x,\ A(x) < A(y) < A(x^{\rightarrow})\}.$$

(AT.2) *Пусть λ, μ — разбиения, а α и β — какие-нибудь композиции, такие, что $\alpha \sim \mu$ и $\beta \sim \lambda'$. Тогда коэффициент $a_{\lambda\mu}$ из* § 2 *гл.* II *равен*

$$a_{\lambda\mu} = \sum_A q^{d(A)},$$

где сумма берется по всем массивам A формы α и веса β, строго упорядоченным по строкам.

Прежде чем доказывать (AT.2), выведем из него (AT.1). В силу (AT.2) целочисленный многочлен от t

$$\sum_A t^{d(A)},$$

где суммирование проводится по тем же массивам, что и в (AT.2), зависит только от λ и μ; обозначим его через $a_{\lambda\mu}(t)$.

(AT.3) (a) *Все коэффициенты многочлена $a_{\lambda\mu}(t)$ неотрицательны.*

(b) $a_{\lambda\mu}(1)$ *есть число матриц из нулей и единиц с суммами по строкам $\mu_1, \mu_2, \ldots$ и суммами по столбцам $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$.*

(c) $a_{\lambda\mu}(t)=0$, *за исключением случая, когда* $\mu \leqslant \lambda$, *причем* $a_{\lambda\lambda}(t)=1$.

Доказательство. (a) очевидно. Для доказательства (b) достаточно установить биекцию между матрицами указанного вида и массивами формы μ и веса λ', строго упорядоченными по строкам. Сопоставим массиву A матрицу (c_{ij}), где $c_{ij}=1$, если в i-й строке массива A есть число j, и $c_{ij}=0$ в противном случае; это и есть требуемая биекция. Наконец, (c) сразу вытекает из (a), (b) и теоремы Гейла — Райзера (примеры 2 § 6 и 8° § 7 гл. I). ∎

В силу (AT.3) (c) матрица $(\alpha_{\lambda\mu}(t))$ является строго верхней унитреугольной с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}[t]$; значит, она обратима и обратная матрица имеет такой же вид. Таким образом, элементы матриц перехода между базисами $(v_{\lambda'})$ и (u_λ) в $H(\mathfrak{o})$ являются целочисленными многочленами от q. Поскольку закон умножения в алгебре $H(\mathfrak{o})$ при записи в базисе $(v_{\lambda'})$ не зависит от $\mathfrak{o}$, отсюда следует, что структурные константы в базисе (u_λ) есть целочисленные многочлены от q. Это доказывает существование многочленов Холла $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Осталось найти их степень и старший коэффициент.

(AT.4) *Степень многочлена* $a_{\lambda\mu}(t)$ *не превосходит* $n(\mu)-n(\lambda)$, *а коэффициент при* $t^{n(\mu)-n(\lambda)}$ *в нем равен* $K_{\mu'\lambda'}$ (§ 5 *гл.* I).

Это сразу вытекает из следующей комбинаторной леммы:

(AT.5) *Для каждого строго упорядоченного по строкам массива* A *формы* μ *и веса* λ' *обозначим через* $\tilde{d}(A)$ *число пар* $(x, y) \in \mu \times \mu$, *таких, что* y *лежит над* x *в том же столбце и* $A(x) < A(y) < A(x^{\rightarrow})$. *Тогда*

(a) $d(A)+\tilde{d}(A)=n(\mu)-n(\lambda)$;

(b) $\tilde{d}(A)=0 \Leftrightarrow A$ *упорядочен по столбцам.*

Доказательство. (a) Положим

$$D(A)=\{(x, y) \in \mu \times \mu\colon\ y <_L x,\ A(x) \leqslant A(y) < A(x^{\rightarrow})\},$$

$$N(\mu)=\{(x, y) \in \mu \times \mu\colon\ y \text{ лежит над } x \text{ в том же столбце}\}$$

и

$$\tilde{D}(A)=\{(x, y) \in N(\mu)\colon\ A(x) < A(y) < A(x^{\rightarrow})\};$$

тогда

$$\operatorname{Card} D(A)=d(A)+\sum_{i \geqslant 1}\binom{\lambda'_i}{2}=d(A)+n(\lambda),$$

$$\operatorname{Card} N(\mu)=\sum_{i \geqslant 1}\binom{\mu'_i}{2}=n(\mu) \quad \text{и} \quad \operatorname{Card} \tilde{D}(A)=\tilde{d}(A).$$

Построим отображение $\varphi\colon D(A)\to N(\mu)$. Пусть $(x, y)\in D(A)$, $x=(i_1, j_1)$, $y=(i_2, j_2)$. Очевидно, что $i_1\neq i_2$; положим $i=\max(i_1, i_2)$, $i'=\min(i_1, i_2)$, $j=\min(j_1, j_2)$ и $\varphi(x, y)=((i, j), (i', j))$. Из определений непосредственно вытекает, что φ есть биекция $D(A)$ на $N(\mu)-\tilde{D}(A)$, откуда следует наше утверждение.

(b) Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Пусть теперь A не упорядочен по столбцам, т. е. найдется пара точек $x=(i, j)$, $y=(i', j)$ диаграммы μ, такая, что $i>i'$ и $A(x)<A(y)$. Выберем такую пару с наибольшим возможным j; очевидно, она входит в $\tilde{D}(A)$, следовательно, $\tilde{d}(A)\neq 0$, что и требуется. ∎

Положим $\tilde{a}_{\lambda\mu}(t)=t^{n(\mu)-n(\lambda)}a_{\lambda\mu}(t^{-1})$. Из (AT.4) и (AT.5) сразу вытекает, что

(AT.6) $\tilde{a}_{\lambda\mu}(t)=\sum\limits_{A} t^{\tilde{d}(A)}$, *где сумма берется по всем массивам A формы μ и веса λ', строго упорядоченным по строкам; в частности, $\tilde{a}_{\lambda\mu}(t)\in \mathbb{Z}[t]$. Имеем $\tilde{a}_{\lambda\mu}(0)=K_{\mu'\lambda'}$.* ∎

Рассмотрим теперь кольцо $\Lambda[t]=\Lambda_{\mathbb{Z}[t]}$ многочленов от t с коэффициентами из кольца симметрических функций Λ; его элементы записываются в виде $P(x; t)$. Ясно, что $\Lambda[t]$ — свободный $\mathbb{Z}[t]$-модуль с базисом (e_λ). В силу (AT.3) (c) матрица $(\tilde{a}_{\lambda\mu}(t))$ является строго верхней унитреугольной. Отсюда следует, что равенства

$$e_{\lambda'}=\sum_{\mu}\tilde{a}_{\lambda\mu}(t)\,P_\mu(x;\ t) \tag{1}$$

однозначно определяют элементы $P_\mu(x; t)\in\Lambda[t]$, и они образуют $\mathbb{Z}[t]$-базис в $\Lambda[t]$. Пусть $f^\lambda_{\mu\nu}(t)$ — структурные константы алгебры $\Lambda[t]$ в базисе $(P_\lambda(x; t))$, т. е.

$$P_\mu(x;\ t)\,P_\nu(x;\ t)=\sum_\lambda f^\lambda_{\mu\nu}(t)\,P_\lambda(t);$$

из сказанного ясно, что $f^\lambda_{\mu\nu}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ при всех λ, μ и ν.

(AT.7) (a) $g^\lambda_{\mu\nu}(t)=t^{n(\lambda)-n(\mu)-n(\nu)}\cdot f^\lambda_{\mu\nu}(t^{-1})$.

(b) *При $t=0$ многочлен $P_\lambda(x; t)$ превращается в S-функцию $s_\lambda(x)$. В частности, $f^\lambda_{\mu\nu}(0)=c^\lambda_{\mu\nu}$ — структурные константы алгебры Λ в базисе (s_λ).*

Доказательство. (a) непосредственно вытекает из определений. Для доказательства (b) достаточно заметить, что $M(e, s)_{\lambda'\mu}=K_{\mu'\lambda'}=\tilde{a}_{\lambda\mu}(0)$ в силу результатов § 6 гл. I и (AT.6). ∎

В силу (AT.7) степень многочлена $g^\lambda_{\mu\nu}(t)$ не превосходит $n(\lambda)-n(\mu)-n(\nu)$, а коэффициент при этой степени t равен $f^\lambda_{\mu\nu}(0)=c^\lambda_{\mu\nu}$. Это завершает доказательство (AT.1).

Осталось доказать утверждение (AT.2). Для этого мы переформулируем определение массива и функции $d(A)$ в терминах цепочек композиций. Если α и β — две композиции, то будем писать $\beta \dashv \alpha$, если $\alpha_i - 1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ при всех $i \geqslant 1$. Если $\beta \dashv \alpha$, то определим $d(\alpha, \beta)$ как число пар натуральных чисел (i, j), таких, что $\beta_i = \alpha_i$, $\beta_j = \alpha_j - 1$ и $(j, \alpha_j) <_L (i, \alpha_i)$.

(AT.8) *Пусть α и β — две композиции, причем $\beta_i = 0$ при $i > r$. Тогда массивы формы α и веса β, строго упорядоченные по строкам, находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с цепочками композиций $(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})$, такими, что $0 = \alpha^{(0)} \dashv \alpha^{(1)} \dashv \ldots \dashv \alpha^{(r)} = \alpha$ и $|\alpha^{(i)}| - |\alpha^{(i-1)}| = \beta_i$ при $i \geqslant 1$. При этом функция $d(A)$ переходит в $\sum_{i \geqslant 1} d(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i-1)})$.*

Доказательство. Поставим в соответствие массиву A цепочку $(\alpha^{(i)})$, где $\alpha^{(i)} = A^{-1}(\{1, \ldots, i\})$. Все требуемые свойства проверяются непосредственно. ■

Вспоминая определение коэффициента $a_{\lambda\mu}$ (§ 2 гл. II), мы видим, что (AT.2) получается с помощью очевидной индукции из следующего утверждения:

(AT.9) *Пусть λ, μ — разбиения с $|\lambda| = |\mu| + r$, а α — любая композиция, такая, что $\alpha \sim \lambda$. Тогда*

$$G^{\lambda}_{\mu\,(1^r)}(\mathfrak{o}) = \sum_{\beta} q^{d(\alpha, \beta)},$$

где сумма берется по композициям β, таким, что $\beta \dashv \alpha$ и $\beta \sim \mu$.

Доказательство. Пусть M — конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ. Напомним, что $G^{\lambda}_{\mu\,(1^r)}(\mathfrak{o})$ — это число подмодулей $N \subset M$ типа (1^r) и котипа μ. Условие, что тип модуля N равен (1^r), означает, что N есть r-мерное векторное подпространство над k в цоколе S модуля M. Обозначим множество этих подпространств через $G_r(S)$. Мы используем разбиение $G_r(S)$ на *клетки Шуберта*. Напомним, что если в S выбран базис (v_i) $(i \in I)$, где I — некоторое линейно упорядоченное множество, то связанные с ним клетки Шуберта C_J в $G_r(S)$ нумеруются подмножествами $J \subset I$ из r элементов. Элементы C_J параметризуются наборами $(c_{ij} \in k$: $j \in J$, $i \in I - J$, $j < i)$: набору (c_{ij}) соответствует подпространство с базисом $\left(v_j + \sum_i c_{ij} v_i : j \in J\right)$. Известно (и легко доказать), что $G_r(S)$ есть дизъюнктное объединение клеток C_J. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Card} C_J = q^{d(J)}$, где $d(J) = \operatorname{Card}\{(i, j) : j \in J, i \in I - J, j < i\}$.

Представим модуль M в виде $M=\bigoplus_{i\geqslant 1}\mathfrak{o}x_i$, где $\operatorname{Ann} x_i=\mathfrak{p}^{\alpha_i}$. Обозначим через I множество индексов $i\geqslant 1$, таких, что $\alpha_i>0$, и для каждого $i\in I$ положим $v_i=\pi^{\alpha_i-1}x_i$, где π — образующая максимального идеала $\mathfrak{p}$; ясно, что векторы $(v_i\colon i\in I)$ образуют k-базис в S. Упорядочим множество I, считая, что j предшествует i, если $(j,\alpha_j)<_L(i,\alpha_i)$. Рассмотрим соответствующее разбиение грассманиана $G_r(S)$ на клетки Шуберта. Подмножества $J\subset I$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с композициями $\beta\dashv\alpha$: подмножеству J соответствует композиция β, такая, что $\beta_i=\alpha_i-1$ при $i\in J$ и $\beta_i=\alpha_i$ при $i\in I-J$. Из определений ясно, что при этом соответствии функция $d(J)$ переходит в $d(\alpha,\beta)$. Наконец, несложно доказать, что все подмодули $N\in C_J$ имеют один и тот же котип μ, где μ — разбиение, такое, что $\mu\sim\beta$. Это завершает доказательство (AT.9). ∎

Замечания. 1. Многочлены $P_\lambda(x;t)$, определяемые формулой (1), называются *многочленами Холла — Литтлвуда.* Их изучению посвящена следующая глава.

2. Легко видеть, что утверждение (AT.9) эквивалентно формуле (4.6) гл. II; каждое из этих утверждений непосредственно получается из другого с помощью известного выражения для гауссовых биномиальных коэффициентов

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}=\sum_J t^{d(J)}, \tag{2}$$

где сумма берется по r-элементным подмножествам линейно упорядоченного множества I из n элементов, а $d(J)$ определено в доказательстве (AT.9) (формула (2) легко вытекает, например, из результатов примера 3 § 2 гл. I). Впрочем, один из стандартных способов доказательства (2) состоит в подсчете двумя разными способами числа точек на грассманиане над конечным полем, что, по существу, и было проделано выше.

Глава III

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ХОЛЛА — ЛИТТЛВУДА

1. Симметрические многочлены R_λ

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и t — независимые переменные над $\mathbb{Z}$, а λ — разбиение длины $\leqslant n$. Положим по определению

$$R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_{w \in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right).$$

Знаменатель в каждом слагаемом справа есть с точностью до знака многочлен Вандермонда

$$a_\delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

(гл. I, § 3), а следовательно,

(1.1) $$R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = a_\delta^{-1} \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \cdot w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} (x_i - tx_j)\right),$$

где, как обычно, $\varepsilon(w)$ — знак перестановки w. Сумма в правой части (1.1) кососимметрична по $x_1, \ldots, x_n$, а значит, делится на a_δ в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, t]$, и, следовательно, R_λ является однородным *симметрическим многочленом от* $x_1, \ldots, x_n$ степени $|\lambda|$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}[t]$. Значит, R_λ представляется в виде линейной комбинации S-функций $s_\mu(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}[t]$. В действительности

(1.2) $$R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_\mu u_{\lambda\mu}(t)\, s_\mu(x_1, \ldots, x_n),$$

где $u_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *и* $u_{\lambda\mu}(t) = 0$, *за исключением случая, когда* $|\lambda| = |\mu|$ *и* $\lambda \geqslant \mu$.

Более того, многочлен $u_{\lambda\lambda}(t)$ можно вычислить явно. Для каждого целого $m \geqslant 0$ положим

$$v_m(t) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1-t^i}{1-t} = \varphi_m(t)/(1-t)^m$$

и для всех разбиений $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ длины $\leqslant n$ (где некоторые из частей λ_i могут быть нулевыми) положим по опре-

делению

$$v_\lambda(t) = \prod_{i \geqslant 0} v_{m_i}(t),$$

где m_i есть число частей λ_j, равных i, при всех $i \geqslant 0$ [1]). Тогда

(1.3) $$u_{\lambda\lambda}(t) = v_\lambda(t).$$

Доказательство (1.2) *и* (1.3). Раскрывая произведение $\prod_{i<j}(x_i - tx_j)$, мы получим сумму членов вида

$$\prod_{i<j} x_i^{r_{ij}} (-tx_j)^{r_{ji}},$$

где (r_{ij}) — произвольная $n \times n$-матрица из нулей и единиц, такая, что

(i) $$r_{ii} = 0, \quad r_{ij} + r_{ji} = 1 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Для каждой такой матрицы (r_{ij}) положим

(ii) $$\alpha_i = \lambda_i + \sum_j r_{ij},$$

(iii) $$d = \sum_{i<j} r_{ji}.$$

Тогда из (1.1) ясно, что R_λ есть сумма членов $(-t)^d a_\alpha a_\delta^{-1}$, где, как и в гл. I, § 3, a_α есть кососимметрический многочлен, порожденный одночленом $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Поскольку $a_\alpha = 0$, если какие-нибудь два из чисел α_i равны между собой, то можно считать, что все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны. Расположим их в убывающем порядке, скажем

(iv) $$\alpha_{w(i)} = \mu_i + n - i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

для некоторой перестановки $w \in S_n$ и некоторого разбиения $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Тогда $a_\alpha a_\delta^{-1}$ равно $\varepsilon(w) s_\mu$, и для доказательства (1.2) достаточно показать, что $\mu \leqslant \lambda$.

Положим $s_{ij} = r_{w(i), w(j)}$. Матрица (s_{ij}) удовлетворяет тем же условиям (i), что и матрица (r_{ij}), и из (ii) и (iv) мы получаем

$$\mu_i + n - i = \lambda_{w(i)} + \sum_j s_{ij}.$$

Отсюда при $1 \leqslant k \leqslant n$

(v) $$\mu_1 + \ldots + \mu_k = \lambda_{w(1)} + \ldots + \lambda_{w(k)} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} - \sum_{i=1}^{k} (n-i).$$

---

[1]) Многочлен $v_\lambda(t)$ зависит не только от разбиения λ, но и от числа n. — *Прим. перев.*

Но

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = \sum_{i,\,j=1}^{k} s_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} s_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}k(k-1) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j>k} s_{ij} \leqslant \frac{1}{2}k(k-1) + k(n-k) = \sum_{i=1}^{k}(n-i).$$

Поэтому из (v) вытекает, что

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k \leqslant \lambda_{w(1)} + \ldots + \lambda_{w(k)} \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_k,$$

и, следовательно, $\mu \leqslant \lambda$. Это доказывает (1.2).

Далее, эти вычисления показывают, что $\lambda = \mu$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{w(i)} = \lambda_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $s_{ij} = 1$ для всех пар $i < j$. Отсюда следует, что

(vi) $$u_{\lambda\lambda}(t) = \sum_{w} \varepsilon(w)(-t)^d,$$

где сумма берется по всем $w \in S_n$, оставляющим на месте разбиение λ, а показатель

$$d = \sum_{i<j} r_{ji} = \sum_{i<j} s_{w^{-1}(j),\, w^{-1}(i)}$$

равен числу $n(w)$ таких пар $i < j$ в $\{1, 2, \ldots, n\}$, что $w^{-1}(j) < w^{-1}(i)$; это число $n(w)$ есть также число пар $l < k$, таких, что $w(k) < w(l)$, а знак $\varepsilon(w)$ равен $(-1)^{n(w)}$. Значит, в силу (vi)

(vii) $$u_{\lambda\lambda}(t) = \sum_{w \in S_n^\lambda} t^{n(w)},$$

где S_n^λ — подгруппа перестановок $w \in S_n$, таких, что $\lambda_{w(i)} = \lambda_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Ясно, что $S_n^\lambda = \prod_{i \geqslant 0} S_{m_i}$, где, как и выше, m_i — число частей λ_j, равных i, и, значит, для доказательства (1.3) достаточно показать, что

(viii) $$\sum_{w \in S_m} t^{n(w)} = v_m(t).$$

Мы докажем утверждение (viii) с помощью индукции по m. При $1 \leqslant i \leqslant m$ обозначим через w_i транспозицию (i, m) (так что w_m есть тождественная перестановка). Элементы w_i образуют систему представителей правых смежных классов группы S_m по подгруппе S_{m-1}, и

$$n(w'w_i) = n(w') + m - i$$

при $w' \in S_{m-1}$, поскольку число m стоит в последовательности $(w'w_i(1), \ldots, w'w_i(m))$ на i-м месте, и, следовательно, за

ним идут $m-i$ чисел, меньших, чем m. Таким образом,

$$\sum_{w \in S_m} t^{n(w)} = \Big(\sum_{w' \in S_{m-1}} t^{n(w')}\Big)(1+t+\ldots+t^{m-1}),$$

откуда сразу следует (viii). Это завершает доказательство утверждения (1.3) ∎

Беря в (1.2) и (1.3) $\lambda = 0$, мы получим

(1.4)
$$\sum_{w \in S_n} w\Big(\prod_{i<j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\Big) = v_n(t),$$

что не зависит от $x_1, \ldots, x_n$.

Покажем теперь, что

(1.5) *Многочлен $R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$ делится на $v_\lambda(t)$ (т. е. все его коэффициенты делятся на $v_\lambda(t)$ в кольце $\mathbb{Z}[t]$).*

Доказательство. Предположим, например, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \ldots = \lambda_m > \lambda_{m+1}$. Тогда каждая $w \in S_n$, переставляющая только числа $1, 2, \ldots, m$, оставляет на месте одночлен $x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}$, и в силу (1.4) из R_λ можно вынести множитель $v_m(t)$. Отсюда следует, что

$$R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = v_\lambda(t) \sum_{w \in S_n/S_n^\lambda} w\Big(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\Big) =$$
$$= v_\lambda(t) P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t).$$

Поскольку R_λ — многочлен от $x_1, \ldots, x_n$, то многочленом от $x_1, \ldots, x_n$ будет и P_λ, а так как t входит только в числители членов суммы P_λ, то P_λ есть симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[t]$. ∎

Именно эти многочлены P_λ, а не R_λ будут предметом изучения в настоящей главе.

2. Функции Холла — Литтлвуда

Только что определенные многочлены $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$ называются *многочленами Холла — Литтлвуда.* Впервые они были косвенно определены Филипом Холлом в терминах алгебры Холла (гл. II), а затем непосредственно Литтлвудом [30], по существу так же, как у нас[1]). Из доказательства

[1]) Определение, близкое к определению Холла, было дано выше в приложении переводчика к гл. II (формула (1)). — *Прим. перев.*

(1.5) получаем два эквивалентных определения:

$$(2.1)\quad P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \frac{1}{v_\lambda(t)} \sum_{w \in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right),$$

$$(2.2)\quad P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_{w \in S_n/S_n^\lambda} w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right).$$

Многочлены P_λ осуществляют интерполяцию между S-функциями s_λ и мономиальными симметрическими функциями m_λ, поскольку

$$(2.3)\qquad P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; 0) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n),$$

что ясно из (2.1), и

$$(2.4)\qquad P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; 1) = m_\lambda(x_1, \ldots, x_n),$$

что ясно из (2.2).

Как и для остальных типов симметрических функций, изучавшихся в гл. I, число переменных $x_1, \ldots, x_n$ не имеет значения при условии, что оно не меньше, чем длина разбиения λ. В самом деле,

(2.5) *Пусть λ — разбиение длины $\leqslant n$. Тогда*

$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_n, 0; t) = P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t).$$

Доказательство. В силу (2.2)

$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_{n+1}; t) =$$

$$= \sum_{w \in S_{n+1}/S_{n+1}^\lambda} w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right).$$

Если положить x_{n+1} равным 0, то в правой части останутся только члены, соответствующие тем перестановкам $w \in S_{n+1}$, которые переводят $n+1$ в некоторое число r, такое, что $\lambda_r = 0$; по модулю S_{n+1}^λ можно считать, что такая перестановка оставляет $n+1$ на месте, так что суммирование в действительности ведется по S_n/S_n^λ. ∎

Замечание. Многочлены $R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$, определенные в § 1, не обладают этим свойством стабильности, поэтому они представляют меньший интерес.

С помощью (2.5) мы можем перейти к пределу и определить $P_\lambda(x; t)$ как элемент кольца $\Lambda[t]$, образом которого в $\Lambda_n[t]$ при всех $n \geqslant l(\lambda)$ является $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$. Симметрическая функция $P_\lambda(x; t)$ называется *функцией Холла —*

Литтлвуда или *HL-функцией*, соответствующей разбиению λ. Она однородна степени $|\lambda|$.

Из (1.2), (1.3) и (1.5) вытекает, что

$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_\mu w_{\lambda\mu}(t)\, s_\mu(x_1, \ldots, x_n)$$

с коэффициентами $w_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$, такими, что $w_{\lambda\mu}(t) = 0$, за исключением случая, когда $|\lambda| = |\mu|$ и $\lambda \geqslant \mu$, причем $w_{\lambda\lambda}(t) = 1$. Отсюда получаем, что

(2.6) *Матрица перехода $M(P, s)$, выражающая функции P_λ через функции s_μ, является строго верхней унитреугольной* (гл. I, § 6). ∎

Поскольку функции s_μ образуют $\mathbb{Z}$-базис кольца Λ симметрических функций, а значит, и $\mathbb{Z}[t]$-базис кольца $\Lambda[t]$, из (2.6) вытекает, что то же верно для функций P_λ:

(2.7) *Симметрические функции $P_\lambda(x; t)$ образуют $\mathbb{Z}[t]$-базис в кольце $\Lambda[t]$.* ∎

Рассмотрим теперь функции P_λ для $\lambda = (1^r)$ и $\lambda = (r)$. В первом случае

(2.8) $$P_{(1^r)}(x; t) = e_r(x),$$

т. е. это r-я элементарная симметрическая функция от переменных x_i.

Доказательство. В силу свойства стабильности (2.5) функция $P_{(1^r)}$ однозначно определяется своим образом в $\Lambda_r[t]$: другими словами, можно считать, что число переменных есть r. Но тогда из (2.2) ясно, что $P_{(1^r)}(x_1, \ldots, x_r; t) = x_1 \ldots x_1 = e_r$. ∎

Положим теперь по определению

$$q_r(x; t) = (1 - t)\, P_{(r)}(x; t) \quad (r \geqslant 1), \qquad q_0(x; t) = 1$$

В силу (2.2) при $r \geqslant 1$

(2.9) $$q_r(x_1, \ldots, x_n; t) = (1 - t) \sum_{i=1}^{n} x_i^r \prod_{j \neq i} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j}.$$

Производящей функцией для функций q_r является

(2.10) $$\sum_{r=0}^{\infty} q_r(x; t)\, y^r = \prod_i \frac{1 - t x_i y}{1 - x_i y}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что число переменных x_i конечно, и положим $z = y^{-1}$. Из обычного правила

разложения на простейшие дроби мы получаем

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{z - tx_i}{z - x_i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t)\,x_i}{z - x_i} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j},$$

так что

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1 - tx_i y}{1 - x_i y} = 1 + (1-t) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y}{1 - x_i y} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j},$$

где коэффициент при y^r для $r \geqslant 1$ равен $q_r(x_1, \ldots, x_n; t)$ в силу (2.9). Теперь, как обычно, пусть $n \to \infty$. ∎

Удобно ввести другое семейство симметрических функций $Q_\lambda(x; t)$, отличающихся от $P_\lambda(x; t)$ скалярными множителями. Они определяются следующим образом:

(2.11) $$Q_\lambda(x; t) = b_\lambda(t)\, P_\lambda(x; t),$$

где

(2.12) $$b_\lambda(t) = \prod_{i \geqslant 1} \varphi_{m_i(\lambda)}(t).$$

Здесь $m_i(\lambda)$ обозначает кратность числа i как части разбиения λ, а $\varphi_r(t) = (1-t)(1-t^2) \ldots (1-t^r)$. В частности,

(2.13) $$Q_{(r)}(x; t) = q_r(x; t).$$

Мы будем называть функции Q_λ, так же как и P_λ, HL-функциями. Их можно также следующим образом определить индуктивно. Если f — произвольный многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ и $1 \leqslant i \leqslant n$, то обозначим через $f^{(i)}$ многочлен, получающийся, если положить $x_i = 0$ в f. Тогда, обозначая $Q_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$ через Q_λ, мы получим

(2.14) $$Q_\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} u_i Q_{\tilde\lambda}^{(i)},$$

где $\tilde\lambda = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ есть разбиение, получаемое из λ выбрасыванием наибольшей части, и

$$u_i = (1-t) \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}.$$

Доказательство. Пусть l — длина разбиения λ. Из определений $b_\lambda(t)$ и $v_\lambda(t)$ имеем

$$v_\lambda(t) = v_{n-l}(t)\, b_\lambda(t)/(1-t)^l,$$

и, следовательно,

$$Q_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \frac{(1-t)^l}{v_{n-l}(t)} R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) =$$

$$= (1-t)^l \sum_{w \in S_n/S_{n-l}} w\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_l^{\lambda_l} \prod_{i=1}^{l} \prod_{j>i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right)$$

в силу (1.4), где группа S_{n-l} действует на переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Отсюда вытекает, что

$$Q_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_{w \in S_n/S_{n-1}} w\left(x_1^{\lambda_1} u_1 Q_{\tilde\lambda}(x_2, \ldots, x_n; t)\right),$$

а это эквивалентно (2.14). ∎

Для каждой конечной последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ целых чисел положим

$$q_\alpha(x; t) = \prod_{i \geqslant 1} q_{\alpha_i}(x; t)$$

с учетом соглашения, что $q_r = 0$ при $r < 0$ (так что $q_\alpha = 0$, если какое-нибудь α_i отрицательно). Тогда функции Q_λ следующим образом связаны с q_α:

$$(2.15) \qquad Q_\lambda = \prod_{j<k} \frac{1 - R_{jk}}{1 - tR_{jk}} q_\lambda,$$

где R_{jk} — повышающие операторы: $R_{jk} q_\lambda = q_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_j+1, \ldots, \lambda_k-1, \ldots)}$.

Доказательство. Применим индукцию по длине l разбиения λ. При $l = 1$ (2.15) сводится к (2.13). Поэтому пусть $l > 1$, и предположим, что результат справедлив для $\tilde\lambda = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ [1]).

Из (2.10) вытекает, что

$$\sum_{r=0}^{\infty} q_r^{(i)} y^r = \frac{1 - x_i y}{1 - tx_i y} \sum_{r=0}^{\infty} q_r y^r,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при y^r, можно выразить $q_r^{(i)}$ через функции q и переменное x_i. Результат можно сформулировать следующим образом:

$$q_r^{(i)} = \frac{1 - x_i E}{1 - tx_i E} q_r,$$

где E — оператор, определенный формулой $Eq_m = q_{m-1}$ при всех m.

[1]) Чтобы дальнейшие формулы были правильными, нужно считать, что последовательность $\tilde\lambda$ имеет вид $(0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_l)$. — *Прим. перев.*

Отсюда следует, что

$$q_{\tilde{\lambda}}^{(i)} = \prod_{j=2}^{l} \frac{1 - x_i E_j}{1 - t x_i E_j} q_{\tilde{\lambda}},$$

где $E_j q_\alpha = q_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_j - 1, \ldots)}$ для всех $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} u_i q_{\tilde{\lambda}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} u_i \prod_{k=2}^{l} \frac{1 - x_i E_k}{1 - t x_i E_k} q_{\tilde{\lambda}},$$

где, как и выше, $u_i = (1 - t) \prod_{j \neq i} (x_i - t x_j)/(x_i - x_j)$. Поскольку в силу (2.9) $q_r = \sum x_i^r u_i$, то

(1) $$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} u_i q_{\tilde{\lambda}}^{(i)} = \prod_{k=2}^{l} \frac{1 - R_{1k}}{1 - t R_{1k}} q_\lambda.$$

Но в силу (2.14) и предположения индукции

$$Q_\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} u_i Q_{\tilde{\lambda}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} u_i \prod_{2 \leqslant j < k \leqslant l} \frac{1 - R_{jk}}{1 - t R_{jk}} q_{\tilde{\lambda}}^{(i)},$$

следовательно, в силу (1)

$$Q_\lambda = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant l} \frac{1 - R_{jk}}{1 - t R_{jk}} q_\lambda,$$

что и требуется. ∎

Поскольку (2.15) может быть записано в виде

$$Q_\lambda = \prod_{j<k} (1 + (t - 1) R_{jk} + (t^2 - t) R_{jk}^2 + \ldots) q_\lambda,$$

то из утверждения (1.14) гл. I вытекает, что

$$Q_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}(t) q_\mu,$$

где $a_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ — такие многочлены, что $a_{\lambda\mu}(t) = 0$, за исключением случая, когда $|\lambda| = |\mu|$ и $\lambda \leqslant \mu$, причем $a_{\lambda\lambda}(t) = 1$. В силу (2.7) функции Q_λ образуют $\mathbb{Q}(t)$-базис в $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(t)$, и, следовательно,

(2.16) *Симметрические функции* q_λ *образуют* $\mathbb{Q}(t)$*-базис в* $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(t)$, *причем матрица перехода* (гл. I, § 6) $M(Q, q)$ *является строго нижней унитреугольной.* ∎

Примеры

1. Полагая $x_i = t^{i-1} (1 \leqslant i \leqslant n)$, мы получим

$$R_\lambda (1, t, \ldots, t^{n-1}; t) = t^{n(\lambda)} v_n (t)$$

непосредственно из определения (1.1), поскольку не обращается в 0 только слагаемое, соответствующее $w = 1$. Отсюда

$$Q_\lambda (1, t, \ldots, t^{n-1}; t) = t^{n(\lambda)} \varphi_n (t) / \varphi_{m_0} (t),$$

где $m_0 = n - l(\lambda)$. Пусть $n \to \infty$; тогда m_0 также стремится к ∞, поэтому, когда $x_i = t^{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$, то $Q_\lambda (1, t, t^2, \ldots; t) = t^{n(\lambda)}$.

2. Мы можем воспользоваться индуктивным определением (2.14) для определения Q_λ для всех конечных последовательностей $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ целых неотрицательных чисел, не обязательно расположенных в убывающем порядке. Формула (2.15) останется верной и может быть использована для распространения определения Q_λ на *все* последовательности $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ целых чисел, положительных или отрицательных. Если $\lambda_l < 0$, то, очевидно, $Q_\lambda = 0$.

Для того чтобы выразить Q_λ, когда числа λ_i не идут в убывающем порядке, как линейную комбинацию функций Q_μ (где все μ являются разбиениями), можно рассуждать следующим образом: поскольку перемена местами x_1 и x_2 переводит

$$\frac{x_1^r x_2^s (x_2 - t x_1)(x_1 - t x_2)}{x_1 - x_2}$$

в

$$-\frac{x_1^s x_2^r (x_2 - t x_1)(x_1 - t x_2)}{x_1 - x_2},$$

отсюда следует, что

$$Q_{(r, s+1)} - t Q_{(r+1, s)} = -(Q_{(s, r+1)} - t Q_{(s+1, r)})$$

или, если заменить r на $r - 1$, что

$$Q_{(s, r)} = t Q_{(r, s)} - Q_{(r-1, s+1)} + t Q_{(s+1, r-1)}.$$

В предположении, что $s < r$, это соотношение позволяет выразить $Q_{(s, r)}$ через функции $Q_{(r-i, s+i)}$, где $0 \leqslant i \leqslant [(r-s)/2] = m$. Ответ имеет вид

$$Q_{(s, r)} = t Q_{(r, s)} + \sum_{i=1}^{m} (t^{i+1} - t^{i-1}) Q_{(r-i, s+i)},$$

если $r - s = 2m + 1$, а при $r - s = 2m$ последний член суммы нужно заменить на $(t^{m+1} - t^m) Q_{(r-m, s+m)}$.

Для простоты мы привели эти формулы для двучленной последовательности (s, r); но то же самое верно для любых двух соседних членов последовательности λ.

3. Определения (2.1) и (2.2) функций P_λ можно записать в терминах понижающих операторов R_{ij} $(i < j)$:

$$P_\lambda = v_\lambda (t)^{-1} \prod_{i<j} (1 - t R_{ji}) s_\lambda = \prod_{\lambda_i > \lambda_j} (1 - t R_{ji}) s_\lambda.$$

Отсюда, например,

$$P_{(n)} = \prod_{j=2}^{n} (1 - t R_{j1}) s_{(n)} = \sum_{J} (-t)^{|J|} \prod_{j \in J} R_{j1} s_{(n)},$$

где сумма берется по всем подмножествам J в $\{2, 3, \ldots, n\}$. Единственные подмножества J, для которых $\prod_{j \in J} R_{j1} s_{(n)} \neq 0$, — это $J = \{2, 3, \ldots, i\}$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$; следовательно,

$$P_{(n)} = \sum_{r=0}^{n-1} (-t)^r s_{(n-r,\, 1^r)}.$$

4°. Представим в сумме (1.4) каждый элемент $w \in S_n$ в виде $w = w_i w'$, где $w' \in S_{n-1}$, а w_i есть транспозиция (i, n), и проведем суммирование. Мы получим тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} = \frac{v_n(t)}{v_{n-1}(t)} = \frac{1 - t^n}{1 - t}. \tag{1}$$

При $t = 0$ это дает

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} = 1. \tag{2}$$

Тождество (2) было использовано Гудом [8°] для простого доказательства следующей гипотезы Дайсона: если $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные неотрицательные целые числа, то свободный член в разложении

$$\prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_j} \tag{3}$$

равен

$$(a_1 + \ldots + a_n)!/a_1! \ldots a_n! \tag{4}$$

В самом деле, обозначим искомый свободный член через $c(a_1, \ldots, a_n)$. Умножив обе части (2) на произведение (3), мы получим

$$c(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} c(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_n). \tag{5}$$

Кроме того, ясно, что

$$c(a_1) = 1,\ c(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = c(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n), \tag{6}$$

если все a_i неотрицательны. Очевидно, соотношения (5) и (6) однозначно определяют коэффициенты $c(a_1, \ldots, a_n)$ для всех целых неотрицательных a_i. Поэтому для доказательства гипотезы Дайсона достаточно показать, что полиномиальные коэффициенты (4) также им удовлетворяют, что очевидно.

Густафсон и Милн [9°] нашли обобщение тождеств (1) и (2), относящееся к произвольным S- и HL-функциям. Ряд интересных гипотез, тесно связанных с гипотезой Дайсона, высказан автором настоящей книги [15°].

3. Снова алгебра Холла

В силу (2.7) произведение $P_\mu P_\nu$ двух HL-функций будет линейной комбинацией функций P_λ, где $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ (λ, μ, ν — разбиения) с коэффициентами из $Z[t]$: это озна-

чает, что существуют многочлены $f^\lambda_{\mu\nu}(t) \in \mathbf{Z}[t]$, такие, что

$$P_\mu(x;\ t)\, P_\nu(x;\ t) = \sum_\lambda f^\lambda_{\mu\nu}(t)\, P_\lambda(x;\ t).$$

Когда $t=0$, то в силу (2.3) имеем

(3.1) $$f^\lambda_{\mu\nu}(0) = c^\lambda_{\mu\nu}$$

— коэффициент при s_λ в $s_\mu s_\nu$. Аналогично в силу (2.4) $f^\lambda_{\mu\nu}(1)$ есть коэффициент при m_λ в произведении $m_\mu m_\nu$, разложенном в сумму мономиальных симметрических функций.

Для того чтобы связать симметрические функции P_λ с алгеброй Холла, нам нужно вычислить многочлен $f^\lambda_{\mu\nu}(t)$ в случае $\nu = (1^m)$.

Напомним, что

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \varphi_n(t)/\varphi_r(t)\,\varphi_{n-r}(t), \text{ если } 0 \leqslant r \leqslant n,$$

и $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = 0$ в остальных случаях, где

$$\varphi_r(t) = (1-t)(1-t^2)\ \ldots\ (1-t^r).$$

(3.2) *Имеем*

$$f^\lambda_{\mu\,(1^m)}(t) = \prod_{i \geqslant 1} \begin{bmatrix} \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \\ \lambda'_i - \mu'_i \end{bmatrix}$$

следовательно, $f^\lambda_{\mu\,(1^m)}(t) = 0$, *если* $\lambda - \mu$ *не является вертикальной* m*-полосой*).

Доказательство. Будем работать с конечным множеством переменных $x_1, \ldots, x_n$, где $n \geqslant l(\mu) + m$. Мы должны умножить многочлен P_μ, заданный формулой (2.2), на многочлен $P_{(1^m)}$, который в силу (2.7) равен m-й элементарной симметрической функции e_m. Пусть $k = \mu_1$ — наибольшая часть разбиения μ; разобьем множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ на подмножества $X_0, \ldots, X_k$ (некоторые из них могут быть пустыми), такие, что $x_j \in X_i$ тогда и только тогда, когда $\mu_j = i$, так что $|X_i| = m_i$ — кратность числа i как части разбиения μ. Обозначим через $e_r(X_i)$ элементарные симметрические функции от множества переменных X_i. Поскольку

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t) = \prod_{j=0}^{k} \prod_{x_i \in X_j} (1 + x_i t),$$

то

(1) $$e_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_r e_{r_0}(X_0) \ldots e_{r_k}(X_k),$$

где сумма берется по всем векторам $r=(r_0, \ldots, r_k)\in \mathbf{N}^{k+1}$, таким, что $r_i \leqslant m_i$ при всех i и $\sum r_i = m$.

Каждому такому вектору r соответствует разбиение λ, определяемое формулой $\lambda'_i = \mu'_i + r_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k+1)$. Очевидно, что $\lambda - \mu$ есть вертикальная m-полоса, и обратно, все разбиения λ, такие, что $\lambda - \mu$ есть вертикальная m-полоса, получаются таким образом.

Каждое $e_{r_i}(X_i)$ в правой части (1) равно $P_{(1^{r_i})}(X_i; t)$ в силу (2.7), значит, в силу (2.1) оно может быть записано в виде суммы по симметрической группе S_{m_i}, действующей на множестве X_i. Преобразованная таким образом формула (1) принимает вид

$$e_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda} c_{\lambda,\mu}(t)^{-1}\Phi_{\lambda,\mu}(x_1, \ldots, x_n; t), \tag{2}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\lambda \supset \mu$, таким, что $\lambda - \mu$ есть вертикальная m-полоса,

$$\Phi_{\lambda,\mu} = \sum_{w \in S_n^{\lambda}} w\left(x_1^{\lambda_1-\mu_1} \ldots x_n^{\lambda_n-\mu_n} \prod_{\substack{i<j\\ \mu_i=\mu_j}} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right)$$

и

$$c_{\lambda,\mu}(t) = \prod_{i=0}^{k} v_{r_i}(t)\, v_{m_i - r_i}(t).$$

Если теперь умножить обе части (2) на многочлен $P_\mu(x_1, \ldots, x_n; t)$, заданный с помощью (2.2), то мы получим

$$P_\mu e_m = \sum_{\lambda} c_{\lambda,\mu}(t)^{-1} R_\lambda,$$

откуда следует, что коэффициент при P_λ в произведении $P_\mu e_m$ есть

$$f^{\lambda}_{\mu(1^m)}(t) = v_\lambda(t)\, c_{\lambda,\mu}(t)^{-1},$$

а это легко приводится к требуемому виду. ∎

Сравнивая (3.2) с (4.6) гл. II, мы видим, что

$$G^{\lambda}_{\mu(1^m)}(\mathfrak{o}) = q^{n(\lambda)-n(\mu)-n(1^m)} f^{\lambda}_{\mu(1^m)}(q^{-1}). \tag{3.3}$$

Выведем отсюда следующую структурную теорему для алгебры Холла $H(\mathfrak{o})$:

(3.4) *Пусть* $\psi\colon H(\mathfrak{o}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to \Lambda_{\mathbf{Q}}$ *есть* $\mathbf{Q}$-*линейное отображение, определяемое формулой*

$$\psi(u_\lambda) = q^{-n(\lambda)} P_\lambda(x; q^{-1})$$

Тогда ψ ***является изоморфизмом колец.***

Доказательство. В силу (2.7) ψ является линейным изоморфизмом. Поскольку $H(\mathfrak{o})$ свободно порождена (как $\mathbb{Z}$-алгебра) элементами $u_{(1^r)}$ (гл. II, (2.3)), мы можем определить гомоморфизм колец $\psi': H(\mathfrak{o}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \Lambda_{\mathbb{Q}}$ формулой $\psi'(u_{(1^r)}) = q^{-r(r-1)/2} e_r$. Покажем, что $\psi' = \psi$, откуда будет следовать (3.4). Для этого мы докажем, что $\psi'(u_\lambda) = \psi(u_\lambda)$ с помощью индукции по разбиению λ. Если $\lambda = 0$, то это очевидно из определений. Предположим теперь, что $\lambda \neq 0$, и пусть μ — разбиение, получаемое из λ выбрасыванием последнего столбца. Предположим, что этот последний столбец состоит из m элементов. Тогда в силу (4.6) гл. II $G^\lambda_{\mu(1^m)}(\mathfrak{o}) = 1$ и $G^\nu_{\mu(1^m)}(\mathfrak{o}) = 0$, за исключением случая, когда $\nu \supset \mu$ и $\nu - \mu$ есть вертикальная m-полоса. Более того, если $\nu - \mu$ есть вертикальная m-полоса, то легко видеть, что $\nu \leqslant \lambda$. Отсюда

(1) $$u_\mu u_{(1^m)} = u_\lambda + \sum_{\nu < \lambda} G^\nu_{\mu(1^m)}(\mathfrak{o})\, u_\nu$$

и, аналогично,

(2) $$P_\mu P_{(1^m)} = P_\lambda + \sum_{\nu < \lambda} f^\nu_{\mu(1^m)}(q^{-1})\, P_\nu,$$

где P_μ обозначает $P_\mu(x; q^{-1})$ и т. д. Если теперь применить к обеим частям (1) гомоморфизм ψ', вспомнить, что в силу (2.8) $P_{(1^m)} = e_m$, и сравнить результат с формулой (2), приняв в качестве предположения индукции, что $\psi'(u_\nu) = q^{-n(\nu)} P_\nu$ при всех $\nu < \lambda$, то из (3.3) будет вытекать, что $\psi'(u_\lambda) = q^{-n(\lambda)} P_\lambda = \psi(u_\lambda)$. ∎

Замечание. Данное доказательство опирается на тождество (3.3), которое кажется просто счастливой случайностью. Можно дать доказательство (3.4), не опирающееся на кажущееся чудо: см. замечания в конце гл. V.

Из (3.4) вытекает, что

(3.5) $$G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o}) = q^{n(\lambda) - n(\mu) - n(\nu)} f^\lambda_{\mu\nu}(q^{-1})$$

для любых трех разбиений λ, μ, ν; значит, в силу (4.3) гл. II многочлены $f^\lambda_{\mu\nu}$ следующим образом связаны с многочленами Холла $g^\lambda_{\mu\nu}$ из гл. II:

(3.6) $$g^\lambda_{\mu\nu}(t) = t^{n(\lambda) - n(\mu) - n(\nu)} f^\lambda_{\mu\nu}(t^{-1}).$$

В частности,

(3.7) (i) *Если* $f^\lambda_{\mu\nu}(0) = 0$, *то многочлен* $f^\lambda_{\mu\nu}(t)$ *есть тождественный нуль.*

(ii) $f^\lambda_{\mu\nu}(t)=0$, *за исключением случая, когда* $|\lambda|=|\mu|+$ $+|\nu|$ *и* $\mu, \nu\subset\lambda$.

Результаты § 4 гл. II дают явную формулу для $f^\lambda_{\mu\nu}(t)$ (в виде суммы по LR-последовательностям типа $(\mu', \nu'; \lambda')$). Мы выпишем эту формулу только в случае $\nu=(r)$:

(3.8) *Если* $\lambda\supset\mu$ *и* $\theta=\lambda-\mu$ — *горизонтальная* r-*полоса, то*

$$f^\lambda_{\mu(r)}(t)=(1-t)^{-1}\prod_{i\in I}\left(1-t^{m_i(\lambda)}\right),$$

где I *есть множество положительных целых чисел* i, *таких, что* $\theta'_i>\theta'_{i+1}$ (*так что* $\theta'_i=1$ *и* $\theta'_{i+1}=0$), *а* $m_i(\lambda)$ — *кратность* i *как части разбиения* λ. *Во всех остальных случаях* $f^\lambda_{\mu(r)}(t)=$ $=0$.

Ввиду (3.6) это просто переписанная формула (4.11) гл. II.

Замечание. Мы пришли к этому результату (которым позднее воспользуемся) обходным путем через алгебру Холла. Можно вывести (3.8) непосредственно из определения функций $P_\lambda(x; t)$: см. [37].

Примеры

Пусть λ — некоторое разбиение. Тогда для всех $m\geqslant 0$

$$\sum_\mu G^\lambda_{\mu(1^m)}(\mathfrak{o})$$

есть число элементарных подмодулей E типа (1^m) в фиксированном $\mathfrak{o}$-модуле M типа λ. Все эти подмодули E лежат в цоколе S модуля M, являющемся k-векторным пространством размерности $l=l(\lambda)$, поэтому выписанная сумма равна числу m-мерных подпространств в l-мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов, что равно $\begin{bmatrix} l \\ m\end{bmatrix}(q)$. Следовательно, из (3.3) мы получаем

$$\sum_\mu t^{n(\mu)}f^\lambda_{\mu(1^m)}(t)=t^{n(\lambda)-m(m-1)/2}\begin{bmatrix} l \\ m\end{bmatrix}(t^{-1}).$$

Пусть теперь y — независимое переменное. Тогда

$$\text{(1)}\quad \left(\sum_\mu t^{n(\mu)}P_\mu\right)\left(\sum_m e_m y^m\right)=\sum_{\lambda,\mu,m} y^m t^{n(\mu)}f^\lambda_{\mu(1^m)}(t)\,P_\lambda=$$

$$=\sum_\lambda t^{n(\lambda)}P_\lambda\sum_m y^m t^{-m(m-1)/2}\begin{bmatrix} l(\lambda) \\ m\end{bmatrix}(t^{-1})=\sum_\lambda t^{n(\lambda)}P_\lambda\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\left(1+t^{1-i}y\right)$$

в силу тождества примера 3 § 2 гл. I. В частности, когда $y=-1$, мы получаем

$$\left(\sum_\mu t^{n(\mu)}P_\mu\right)\left(\sum_m(-1)^m e_m\right)=1$$

и, следовательно,

(2) $$\sum_{|\mu|=n} t^{n(\mu)} P_\mu = h_n.$$

Поэтому тождество (1) принимает вид

(3) $$\prod_{i \geqslant 1} (1 + x_i y)/(1 - x_i) = \sum_\lambda t^{n(\lambda)} \prod_{j=1}^{l(\lambda)} (1 + t^{1-j} y) . P_\lambda (x; t).$$

4. Ортогональность

Обобщая результаты § 4 гл. I, мы дадим три разложения в ряд произведения

$$\prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j).$$

Первое из них — это

(4.1) $$\prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) = \sum_\lambda z_\lambda (t)^{-1} p_\lambda (x) p_\lambda (y),$$

(сумма берется по всем разбиениям λ), где

$$z_\lambda (t) = z_\lambda \cdot \prod_{i \geqslant 1} (1 - t^{\lambda_i})^{-1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\log \prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) = \sum_{i,j} (\log (1 - t x_i y_j) - \log (1 - x_i y_j)) =$$
$$= \sum_{i,j} \sum_{m=1}^\infty \frac{1 - t^m}{m} (x_i y_j)^m = \sum_{m=1}^\infty \frac{1 - t^m}{m} p_m (x) p_m (y)$$

и, следовательно,

$$\prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) = \prod_{m=1}^\infty \exp \left(\frac{1 - t^m}{m} p_m (x) p_m (y) \right) =$$
$$= \prod_{m=1}^\infty \sum_{r_m=0}^\infty \frac{(1 - t^m)^{r_m}}{m^{r_m} r_m!} p_m (x)^{r_m} p_m (y)^{r_m} = \sum_\lambda z_\lambda (t)^{-1} p_\lambda (x) p_\lambda (y). \blacksquare$$

Далее,

(4.2) $$\prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) = \sum_\lambda q_\lambda (x; t) m_\lambda (y) =$$
$$= \sum_\lambda m_\lambda (x) q_\lambda (y; t),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ.

Доказательство. Из (2.10) вытекает, что

$$\prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) = \prod_j \sum_{r=0}^\infty q_{r_j} (x; t) y_j^{r_j};$$

раскрывая произведение справа, мы видим, что оно равно

$$\sum_{\lambda} q_\lambda(x;\ t)\, m_\lambda(y).$$

Результат, где x и y переставлены, получается аналогично. ∎

Из (4.2) следует, что

(4.3) *Матрица перехода $M(q, m)$ является симметрической.* ∎

Далее, обобщая (4.3) гл. I, мы имеем

(4.4) $$\prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) = \sum_{\lambda} P_\lambda(x;\ t)\, Q_\lambda(y;\ t) = \sum_{\lambda} b_\lambda(t)\, P_\lambda(x;\ t)\, P_\lambda(y;\ t).$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы перехода

$$A = M(q,\ Q),\quad B = M(m,\ Q),\quad C = M(q,\ m).$$

В силу (2.16) матрица A^{-1} является нижней унитреугольной, значит, нижней унитреугольной будет и A. Кроме того, матрица B — верхняя треугольная, поскольку

$$B^{-1} = M(Q,\ P)\, M(P,\ s)\, M(s,\ m),$$

причем $M(Q, P)$ диагональна в силу (2.11), $M(P, s)$ — верхняя унитреугольная в силу (2.6) и $M(s, m)$ — верхняя унитреугольная в силу (6.5) гл. I.

Очевидно, $C = AB^{-1}$, причем в силу (4.3) C симметрична. Значит, $B^{*}A' = AB^{-1}$, или, что эквивалентно, $A'B = B'A = D$. Но матрица $A'B$ является верхней треугольной, а $B'A$ — нижней треугольной; значит, D — диагональная матрица с теми же диагональными элементами, что у B, так что $D = M(P, Q)$, и, следовательно, $D_{\lambda\lambda} = b_\lambda(t)^{-1}$.

Отсюда

$$\sum_{\lambda} q_\lambda(x;\ t)\, m_\lambda(y) = \sum_{\lambda,\mu,\nu} A_{\lambda\mu} B_{\lambda\nu} Q_\mu(x;\ t)\, Q_\nu(x;\ t) = \sum_{\mu} b_\mu(t)^{-1} Q_\mu(x;\ t)\, Q_\mu(y;\ t) = \sum_{\mu} P_\mu(x;\ t)\, Q_\mu(y;\ t),$$

так что (4.4) вытекает из (4.2). ∎

Замечание. У произведения $\prod (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j)$ есть и другие разложения. Положим по определению

(4.5) $$S_\lambda(x;\ t) = \det\left(q_{\lambda_i - i + j}(x;\ t)\right)$$

для всех разбиений λ, так что

(4.6) $$S_\lambda(x;\ t) = \prod_{i<j} (1 - R_{ij})\, q_\lambda = \prod_{i<j} (1 - t R_{ij})\, Q_\lambda$$

в силу (2.15) и формулы (3.4″) гл. I. Если ввести множество (воображаемых) переменных ξ_i посредством формулы

$$\prod_i (1 - tx_iy)/(1 - x_iy) = \prod_i (1 - \xi_i y)^{-1},$$

то $q_r(x; t) = h_r(\xi)$; следовательно, $S_\lambda(x; t) = s_\lambda(\xi)$ в силу (3.4) гл. I.

Значит, из формулы (4.3) гл. I получаем

(4.7)
$$\prod_{i, j} (1 - tx_iy_j)/(1 - x_iy_j) = \sum_\lambda S_\lambda(x; t)\, s_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x)\, S_\lambda(y; t).$$

Определим теперь скалярное произведение на $\Lambda[t]$ (со значениями в $\mathbb{Q}(t)$), потребовав, чтобы базисы $(q_\lambda(x; t))$ и $(m_\lambda(x))$ были двойственны друг другу:

(4.8) $$\langle q_\lambda(x; t),\ m_\mu(x)\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Те же рассуждения, что и в § 4 гл. I, в применении к тождествам (4.1), (4.4) и (4.7) показывают, что

(4.9) $$\langle P_\lambda(x; t),\ Q_\mu(x; t)\rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

(4.10) $$\langle S_\lambda(x; t),\ s_\mu(x)\rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

(4.11) $$\langle p_\lambda(x),\ p_\mu(x)\rangle = z_\lambda(t)\, \delta_{\lambda\mu}.$$

(4.12) *Билинейная форма $\langle u, v\rangle$ на пространстве $\Lambda[t]$ симметрична.*

При $t = 0$ это скалярное произведение превращается в скалярное произведение из гл. I, поскольку $P_\lambda(x; 0) = Q_\lambda(x; 0) = s_\lambda(x)$. При $t = 1$ оно теряет смысл, поскольку $b_\lambda(1) = 0$, и, следовательно, $Q_\lambda(x; 1) = 0$ для всех разбиений $\lambda \neq 0$.

Примеры

1. Беря в (4.4) $y_i = t^{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$ и применяя пример 1 § 2, мы получим

$$\sum_\lambda t^{n(\lambda)} P_\lambda(x; t) = \prod (1 - x_i)^{-1},$$

так что

$$\sum_{|\lambda| = n} t^{n(\lambda)} P_\lambda(x; t) = h_n(x)$$

(см. также пример 1 § 3).

2. Применяя к переменным y в (4.7) инволюцию ω (гл. I, § 2), мы получим

$$\sum_\lambda S_\lambda(x; t)\, s_{\lambda'}(y) = \prod_{i, j} (1 + x_iy_j)/(1 + tx_iy_j).$$

Возьмем теперь $y_i = t^{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$; тогда (пример 2 § 3 гл. I)

$$s_{\lambda'}(y) = t^{n(\lambda')} H_\lambda(t)^{-1},$$

следовательно,
$$\sum_\lambda S_\lambda(x;t)\,t^{n(\lambda')}H_\lambda(t)^{-1}=\prod(1+x_i).$$

Замечания и библиографические указания

Тождество (4.4) эквивалентно соотношениям ортогональности для многочленов Грина (§ 7). Приведенное доказательство принадлежит Литтлвуду [30].

5. Косые HL-функции

Поскольку симметрические функции P_λ образуют базис в $\Lambda[t]$, то каждая симметрическая функция u однозначно определяется своими скалярными произведениями со всеми P_λ: в самом деле, в силу (4.9)
$$u=\sum_\lambda\langle u,\ P_\lambda\rangle Q_\lambda.$$

В частности, для любой пары разбиений λ, μ мы можем определить симметрическую функцию $Q_{\lambda/\mu}$ посредством

(5.1) $$\langle Q_{\lambda/\mu},\ P_\nu\rangle=\langle Q_\lambda,\ P_\mu P_\nu\rangle=f^\lambda_{\mu\nu}(t),$$

или, что эквивалентно,

(5.2) $$Q_{\lambda/\mu}=\sum_\nu f^\lambda_{\mu\nu}(t)\,Q_\nu.$$

Поскольку $f^\lambda_{\mu\nu}(t)=0$, за исключением случая, когда $\mu\subset\lambda$ (3.7), отсюда следует, что

(5.3) $Q_{\lambda/\mu}=0$, *за исключением случая, когда* $\mu\subset\lambda$.

В силу (5.1) $\langle Q_{\lambda/\mu},u\rangle=\langle Q_\lambda,P_\mu u\rangle$ для всех симметрических функций u. В частности, при $\mu=0$ отсюда следует, что $Q_{\lambda/0}=Q_\lambda$. При $t=0$ функция $Q_{\lambda/\mu}$ сводится к косой S-функции $s_{\lambda/\mu}$.

Аналогично, меняя местами функции P и Q в (5.1), мы определим функцию $P_{\lambda/\mu}$:

(5.1′) $$\langle P_{\lambda/\mu},\ Q_\nu\rangle=\langle P_\lambda,\ Q_\mu Q_\nu\rangle$$

для всех разбиений ν. Поскольку $Q_\lambda=b_\lambda(t)P_\lambda$, отсюда следует, что

(5.4) $$Q_{\lambda/\mu}=b_{\lambda/\mu}(t)\,P_{\lambda/\mu},$$

где $b_{\lambda/\mu}(t)=b_\lambda(t)/b_\mu(t)$.

Из (5.2) вытекает, что
$$\sum_\lambda Q_{\lambda/\mu}(x;\ t)\,P_\lambda(y;\ t)=\sum_{\lambda,\nu}f^\lambda_{\mu\nu}(t)\,Q_\nu(x;\ t)\,P_\lambda(y;\ t)=$$
$$=\sum_\nu Q_\nu(x;\ t)\,P_\mu(y;\ t)\,P_\nu(y;\ t),$$

и, следовательно, в силу (4.4)

$$\sum_{\lambda} Q_{\lambda/\mu}(x;\ t)\, P_{\lambda}(y;\ t) = P_{\mu}(y;\ t) \prod_{i,j} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{\lambda,\mu} Q_{\lambda/\mu}(x;\ t)\, P_{\lambda}(y;\ t)\, Q_{\mu}(z;\ t) =$$

$$= \sum_{\mu} P_{\mu}(y;\ t)\, Q_{\mu}(z;\ t) \prod_{i,j} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j} = \prod_{i,j} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j} \prod_{j,k} \frac{1 - ty_j z_k}{1 - y_j z_k},$$

что снова в силу (4.4) равняется

$$\sum_{\lambda} Q_{\lambda}(x,\ z;\ t)\, P_{\lambda}(y;\ t).$$

Следовательно,

$$Q_{\lambda}(x,\ z;\ t) = \sum_{\mu} Q_{\lambda/\mu}(x;\ t)\, Q_{\mu}(z;\ t), \tag{5.5}$$

где суммирование в силу (5.3) ведется по разбиениям $\mu \subset \lambda$. Аналогично

$$P_{\lambda}(x,\ z;\ t) = \sum_{\mu} P_{\lambda/\mu}(x;\ t)\, P_{\mu}(z;\ t). \tag{5.5$'$}$$

Точно так же, как в § 5 гл. I, эти формулы позволяют представить симметрические функции $P_{\lambda/\mu}$ и $Q_{\lambda/\mu}$ как суммы одночленов. Поскольку базисы (m_ν) и (q_ν) двойственны по отношению к скалярному произведению (4.8), то

$$Q_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} \langle Q_{\lambda/\mu},\ q_\nu \rangle\, m_\nu = \sum_{\nu} \langle Q_{\lambda},\ P_\mu q_\nu \rangle\, m_\nu. \tag{5.6}$$

Далее, в силу (3.8) имеем

$$P_\mu q_r = \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda/\mu}(t)\, P_\lambda, \tag{5.7}$$

где сумма берется по всем разбиениям λ, таким, что $\theta = \lambda - \mu$ есть горизонтальная r-полоса, и

$$\varphi_{\lambda/\mu}(t) = \prod_{i \in I} \left(1 - t^{m_i(\lambda)}\right), \tag{5.8}$$

где I есть множество целых $i \geqslant 1$, таких, что $\theta_i' > \theta_{i+1}'$ (т. е. $\theta_i' = 1$ и $\theta_{i+1}' = 0$).

С помощью (5.7) мы представим произведение $P_\mu q_\nu$, где μ и ν — произвольные разбиения, как линейную комбинацию функций P_λ. Пусть T — таблица (гл. I, § 1) формы $\lambda - \mu$ и веса ν. Тогда задание T равносильно заданию последовательности разбиений $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(r)})$, такой, что $\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(r)} = \lambda$ и все $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ являются горизонтальными

полосами. Положим

(5.9) $$\varphi_T(t)=\prod_{i=1}^{r}\varphi_{\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}}(t);$$

тогда

(5.10) $$P_\mu q_\nu=\sum_\lambda\Big(\sum_T\varphi_T(t)\Big)P_\lambda,$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $\lambda\supset\mu$, таким, что $|\lambda-\mu|=|\nu|$, а внутренняя сумма берется по всем таблицам T формы $\lambda-\mu$ и веса ν. Это прямое следствие (5.7) и индукции по длине разбиения ν.

Из (5.6) и (5.10) вытекает, что

(5.11) $$Q_{\lambda/\mu}=\sum_T\varphi_T(t)\,x^T$$

(*сумма берется по всем таблицам* T *формы* $\lambda-\mu$), *где, как и в* (5.13) *гл.* I, x^T *есть одночлен, определяемый таблицей* T.

Аналогичный результат справедлив для $P_{\lambda/\mu}$. Прежде всего если $\lambda-\mu=\theta$ есть горизонтальная полоса, то по определению положим

(5.8′) $$\psi_{\lambda/\mu}(t)=\prod_{j\in J}\left(1-t^{m_j(\mu)}\right),$$

где J — множество целых $j\geqslant 1$, таких, что $\theta'_j<\theta'_{j+1}$ (т. е. $\theta'_j=0$ и $\theta'_{j+1}=1$); далее, для таблицы T, такой же, как и выше, положим

(5.9′) $$\psi_T(t)=\prod_{i=1}^{r}\psi_{\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}}(t).$$

Легко проверить, что

(5.12) $$\varphi_{\lambda/\mu}(t)/\psi_{\lambda/\mu}(t)=b_\lambda(t)/b_\mu(t),$$

откуда

(5.13) $$\varphi_T(t)/\psi_T(t)=b_\lambda(t)/b_\mu(t),$$

если T имеет форму $\lambda-\mu$. Из (5.4), (5.11) и (5.13) вытекает, что

(5.11′) $$P_{\lambda/\mu}=\sum_T\psi_T(t)\,x^T,$$

где суммирование ведется по всем таблицам T формы $\lambda-\mu$.

Кроме того, из (5.7) и (5.12) мы получаем вместо (5.7) формулу

(5.7′) $$Q_\mu q_r=\sum_\lambda\psi_{\lambda/\mu}(t)\,Q_\lambda,$$

где сумма берется по всем разбиениям $\lambda\supset\mu$, таким, что $\lambda-\mu$ есть горизонтальная r-полоса.

Замечания. 1. В то время как косая S-функция $s_{\lambda/\mu}$ зависит только от разности $\lambda-\mu$, симметрические функции $P_{\lambda/\mu}$ и $Q_{\lambda/\mu}$ зависят и от λ, и от μ; это видно из (5.11) и (5.11′).

2. В случае когда есть только одно переменное x, имеем

$$Q_{\lambda/\mu}(x;\ t)=\varphi_{\lambda/\mu}(t)\,x^{|\lambda-\mu|}, \tag{5.14}$$

если $\lambda-\mu$ есть горизонтальная полоса, и $Q_{\lambda/\mu}(x;t)=0$ в остальных случаях. Аналогично

$$P_{\lambda/\mu}(x;\ t)=\psi_{\lambda/\mu}(t)\,x^{|\lambda-\mu|}, \tag{5.14′}$$

если $\lambda-\mu$ есть горизонтальная полоса, и $P_{\lambda/\mu}(x;t)=0$ в остальных случаях.

Формулы (5.14) и (5.14′) являются частными случаями соответственно (5.11) и (5.11′).

Примеры

Некоторые из формальных тождеств, приведенные в примерах § 5 гл. I, могут быть обобщены.

1. $$\sum_{\lambda} P_\lambda(x;t)=\prod_i (1-x_i)^{-1}\prod_{i<j}(1-tx_ix_j)/(1-x_ix_j),$$

где сумма берется по всем разбиениям λ.

Достаточно доказать это тождество, когда $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$, причем сумма слева берется по всем разбиениям длины $\leqslant n$. С помощью индукции по n достаточно, таким образом, доказать, что

$$\sum_{\lambda} P_\lambda(x,\ y;\ t)=\frac{1}{1-y}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_iy}{1-x_iy}\sum_{\nu}P_\nu(x;t),$$

где x_{n+1} заменено на y. Далее, в силу (5.5′) и (5.14′)

$$P_\lambda(x,\ y;\ t)=\sum_{\mu\subset\lambda}P_{\lambda/\mu}(y;t)\,P_\mu(x;t)=\sum_{\mu\subset\lambda}\psi_{\lambda/\mu}(t)\,y^{|\lambda-\mu|}P_\mu(x;t),$$

где сумма берется по разбиениям $\mu\subset\lambda$, таким, что $\lambda-\mu$ — горизонтальная полоса. С другой стороны, в силу (2.9)

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_iy}{1-x_iy}\sum_{\nu}P_\nu(x;t)=\sum_{\nu,r}P_\nu(x;t)\,q_r(x;t)\,y^r,$$

а в силу (5.7)

$$P_\nu(x;t)\,q_r(x;t)\,y^r=\sum_{\mu\supset\nu}\varphi_{\mu/\nu}(t)\,P_\mu(x;t)\,y^{|\mu-\nu|},$$

где сумма берется по всем разбиениям $\mu\supset\nu$, таким, что $\mu-\nu$ — горизонтальная r-полоса. Таким образом, нам осталось доказать, что

$$\sum_{\lambda\supset\mu}\psi_{\lambda/\mu}(t)\,y^{|\lambda-\mu|}=(1-y)^{-1}\sum_{\nu\subset\mu}\varphi_{\mu/\nu}(t)\,y^{|\mu-\nu|} \tag{1}$$

для всех разбиений μ, где $\lambda-\mu$ и $\mu-\nu$ — горизонтальные полосы.

Для каждого подмножества I в $[1, \mu_1]$ рассмотрим все разбиения $\lambda \supset \supset \mu$ и $\nu \subset \mu$, такие, что

(2) $$\psi_{\lambda/\mu}(t) = \varphi_{\mu/\nu}(t) = \prod_{i \in I} \left(1 - t^{m_i(\mu)}\right).$$

Пусть $i_1, i_1 + i_2, \ldots, i_1 + \ldots + i_r$ — элементы из I в возрастающем порядке. Тогда легко видеть, что вклад в левую часть (1) от разбиений λ, удовлетворяющих (2), есть

(3) $$\left(1 + y + \ldots + y^{i_1 - 1}\right)\left(y + y^2 + \ldots + y^{i_2 - 1}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(y + \ldots + y^{i_r - 1}\right) y (1 - y)^{-1},$$

и, аналогично, вклад в правую часть (1) от разбиений ν, удовлетворяющих (2), есть

$$(1 - y)^{-1}\left(y + y^2 + \ldots + y^{i_1}\right)\left(y + y^2 + \ldots + y^{i_2 - 1}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(y + \ldots + y^{i_r - 1}\right)$$

что, очевидно, равно (3). Значит, обе части (1) действительно равны, что завершает доказательство.

При $t = 0$ это тождество сводится к тождеству примера 4 § 5 гл. I.

2. $$\sum_\mu P_\mu(x; t) = \prod_i \left(1 - x_i^2\right)^{-1} \prod_{i < j} \left(1 - t x_i x_j\right) / \left(1 - x_i x_j\right),$$

где сумма берется по разбиениям μ, все части которых *четны*.

Ввиду примера 1 достаточно показать, что

$$\sum_\mu P_\mu(x; t) \sum_{m \geqslant 0} e_m(x) = \sum_\lambda P_\lambda(x; t),$$

где сумма справа берется по всем разбиениям λ. Далее, каждое разбиение λ однозначно определяет четное разбиение μ путем уменьшения всех нечетных частей λ на 1, так что $\lambda_i' - \mu_i' = 0$, если i четно, и $\lambda_i' - \mu_i' = = m_i(\lambda)$, если i нечетно. Из (3.2) вытекает, что $f^\lambda_{\mu(1^m)}(t) = 1$, где $m = = |\lambda - \mu|$, поэтому коэффициент при P_λ в $P_\mu e_m$ есть 1.

3. $$\sum_\nu c_\nu(t) P_\nu(x; t) = \prod_{i < j} (1 - t x_i x_j)/(1 - x_i x_j),$$

где сумма берется по разбиениям ν, все столбцы которых имеют четную длину, а $c_\nu(t) = \prod_{i \geqslant 1} (1 - t)\left(1 - t^3\right) \ldots \left(1 - t^{m_i - 1}\right)$, где $m_i = m_i(\nu)$.

Из примера 1 вытекает, что

$$\prod_{i < j} (1 - t x_i x_j)/(1 - x_i x_j) = \left(\sum_\lambda P_\lambda(x; t)\right)\left(\sum_m (-1)^m e_m(x)\right) =$$
$$= \sum_{\lambda, m} (-1)^m \sum_\mu f^\mu_{\lambda(1^m)}(t) P_\mu(x; t),$$

поэтому, учитывая (3.2), мы видим, что коэффициент при $P_\mu(x; t)$ (μ — произвольное разбиение) в $\prod_{i < j} (1 - t x_i x_j)/(1 - x_i x_j)$ равен

$$\prod_{i \geqslant 1} \sum_{r_i = 0}^{m_i(\mu)} (-1)^{r_i} \begin{bmatrix} m_i(\mu) \\ r_i \end{bmatrix}.$$

Но (см. [2], теорема 3.4) внутренняя сумма есть 0, если $m_i(\mu)$ нечетно, и равна $(1-t)\left(1-t^3\right)\ldots\left(1-t^{m_i(\mu)-1}\right)$, если $m_i(\mu)$ четно. Отсюда получается наш результат.

Поскольку $c_\nu(t)=b_\nu(t)/b_{\nu/2}(t^2)$, где $\nu/2$ — разбиение, определяемое формулой $m_i(\nu/2)=m_i(\nu)/2$ для всех i, то только что доказанное тождество можно переписать в виде

$$\sum_\nu b_{\nu/2}(t^2)^{-1}Q_\nu(x;t)=\prod_{i<j}(1-tx_ix_j)/(1-x_ix_j),$$

где суммирование вновь ведется по разбиениям ν, все столбцы которых имеют четную длину, т. е. разбиениям, в которые все части входят четное число раз.

4. $$\prod_i\frac{1-tx_i}{1-x_i}\prod_{i<j}\frac{1-tx_ix_j}{1-x_ix_j}=\sum_\lambda d_\lambda(t)^{-1}Q_\lambda(x;t)$$

(сумма берется по всем разбиениям λ), где

$$d_\lambda(t)=\prod_{i\geqslant 1}\prod_{j=1}^{[m_i/2]}(1-t^{2j})$$

и $m_i=m_i(\lambda)$.

Из примера 3 и (2.10) получаем

$$\prod_i\frac{1-tx_i}{1-x_i}\prod_{i<j}\frac{1-tx_ix_j}{1-x_ix_j}=\left(\sum_{r=0}^\infty q_r(x;t)\right)\left(\sum_\nu b_{\nu/2}(t^2)^{-1}Q_\nu(x;t)\right)=$$
$$=\sum_{\lambda,\nu}\frac{\psi_{\lambda/\nu}(t)}{b_{\nu/2}(t^2)}Q_\lambda(x;t)$$

в силу (5.7′), где суммирование ведется по всем ν, столбцы которых четны, и по всем $\lambda\supset\nu$, таким, что $\lambda-\nu$ есть горизонтальная полоса. Каждое разбиение λ определяет единственное такое ν, получающееся из λ выбрасыванием нижнего квадратика из всех столбцов нечетной длины. Если $\lambda-\nu=\theta$, то это означает, что $\theta_i'=1$ или $\theta_i'=0$ в зависимости от того, нечетно или четно λ_i'. При этом $m_i(\nu)=m_i(\lambda)-\theta_i'+\theta_{i+1}'$ и $\psi_{\lambda/\nu}(t)$ есть произведение $\prod\left(1-t^{m_i(\lambda)-\theta_i'+\theta_{i+1}'}\right)$, взятое по тем $i\geqslant 1$, для которых $\theta_i'=0$ и $\theta_{i+1}'=1$. Отсюда следует, что $b_{\nu/2}(t^2)/\psi_{\lambda/\nu}(t)$ совпадает с многочленом $d_\lambda(t)$, определенным выше.

5. Положим

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n;t)=\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-1}\prod_{i<j}(1-tx_ix_j)/(1-x_ix_j)=$$
$$=\sum_\lambda P_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t)$$

(пример 1). Пусть u — дополнительное переменное; тогда формальный степенной ряд

$$S(u)=\sum P_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t)\,u^{\lambda_0},$$

где сумма берется по всем $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, а $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, равен

$$\sum_{\varepsilon} \frac{\Phi\left(x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}; t\right)}{1 - u \prod x_i^{(1-\varepsilon_i)/2}},$$

причем сумма берется по всем наборам $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где все ε_i равны ± 1 (т. е. эта сумма состоит из 2^n слагаемых).

Обозначим через X множество переменных $x_1, \ldots, x_n$ и для всех подмножеств E в X обозначим через $p(E)$ произведение элементов из E (в частности, $p(\varnothing) = 1$).

Предположим, что разбиение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ имеет вид $\left(\mu_1^{r_1}, \mu_2^{r_2}, \ldots, \mu_k^{r_k}\right)$, где $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_k \geqslant 0$, а r_i — положительные целые числа, сумма которых есть n. Тогда в силу (2.2)

(1)
$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_f p\left(f^{-1}(1)\right)^{\mu_1} \ldots p\left(f^{-1}(k)\right)^{\mu_k} \prod_{f(x_i) < f(x_j)} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j},$$

где суммирование ведется по всем сюръективным отображениям $f\colon X \to \{1, 2, \ldots, k\}$, таким, что $|f^{-1}(i)| = r_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$.

Каждая такая сюръекция f определяет *фильтрацию* на X

$$\mathscr{F}: \varnothing = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_k = X$$

(все включения строгие) в соответствии с правилом

$$x \in F_r \Leftrightarrow f(x) \leqslant r.$$

Обратно, каждая такая фильтрация $\mathscr{F}$ длины k однозначно определяет сюръекцию $f\colon X \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Из (1) вытекает, что

$$S(u) = \sum_{\mathscr{F}} \pi_{\mathscr{F}} \sum u^{\mu_0} \prod_{i=1}^{k} p(F_i - F_{i-1})^{\mu_i}, \tag{2}$$

где внешняя сумма берется по всем фильтрациям $\mathscr{F} = (F_0, \ldots, F_k)$ множества X (с произвольным k), а внутренняя сумма — по всем целым μ_0, $\mu_1, \ldots, \mu_k$, таким, что $\mu_0 \geqslant \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_k \geqslant 0$; наконец,

$$\pi_{\mathscr{F}} = \prod_{f(x_i) < f(x_j)} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j},$$

где f — функция $X \to \{1, 2, \ldots, k\}$, определяемая фильтрацией $\mathscr{F}$.

Положим теперь $\nu_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$, $\nu_k = \mu_k$, так что $\nu_0 \geqslant 0$, $\nu_k \geqslant 0$ и $\nu_i > 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Тогда внутренняя сумма в (2) есть

$$\sum_{\nu_0, \ldots, \nu_k} u^{\nu_0 + \ldots + \nu_k} \prod_{i=1}^{k} p(F_i)^{\nu_i} = \frac{1}{1-u} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p(F_i)\, u}{1 - p(F_i)\, u} \cdot \frac{1}{1 - p(X)\, u},$$

и мы запишем это выражение в виде $(1-u)^{-1} A_{\mathscr{F}}(u)$; значит, из (2) мы получаем

$$S(u) = (1-u)^{-1} \sum_{\mathscr{F}} \pi_{\mathscr{F}} A_{\mathscr{F}}(u), \tag{3}$$

где сумма, как и выше, берется по всем фильтрациям $\mathscr{F}$ множества X.

Заметим, что

$$S(u)(1-u) = \sum_{\lambda} P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)\, u^{\lambda_1},$$

значит, $S(u)(1-u)|_{u=1}$ равняется $\Phi(x_1, \ldots, x_n; t)$, так что

(4) $$\Phi(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} A_{\mathcal{F}}(1).$$

Формула (3) показывает, что $S(u)$ есть рациональная функция от u (с коэффициентами из кольца $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, t)$). Знаменатели в правой части (3) — это произведения множителей вида $(1-p(Y)u)$, где $Y \subset X$. Значит, можно представить $S(u)$ как сумму простейших дробей, скажем

(5) $$S(u) = \sum_{Y \subset X} \frac{a(Y)}{1-p(Y)u}.$$

Для вычисления $a(Y)$ нужно обычным образом представить $(1-u)^{-1}A_{\mathcal{F}}(u)$ как сумму простейших дробей для всех фильтраций $\mathcal{F}$, содержащих подмножество Y, а затем результаты просуммировать. Используя (4), читатель легко проверит, что для всех $Y \subset X$

(6) $$a(Y) = \Phi\left(x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}; t\right),$$

где $\varepsilon_i = -1$ или $\varepsilon_i = +1$, если соответственно $x_i \in Y$ или $x_i \notin Y$. Поскольку

$$p(Y) = \prod_{x_i \in Y} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i^{(1-\varepsilon_i)/2},$$

это дает требуемое утверждение.

6. Матрицы перехода

Нам встречались различные базисы (целочисленные и рациональные) в кольце $\Lambda[t]$ симметрических функций с коэффициентами из $\mathbb{Z}[t]$, в частности (§ 4):

(6.1) *базисы (P_λ) и (Q_λ) двойственны друг другу,*

базисы (q_λ) и (m_λ) двойственны друг другу,

базисы (S_λ) и (s_λ) двойственны друг другу

по отношению к скалярному произведению из § 4.

В силу (2.6) матрица перехода

$$K(t) = M(s, P)$$

от S-функций $s_\lambda(x)$ к HL-функциям $P_\mu(x; t)$ является строго верхней унитреугольной. Для любых t, u

(6.2) $$M(P(x; t), P(x; u)) = K(t)^{-1} K(u);$$

кроме того, $K(0)$ — единичная матрица, а $K(1)$ — матрица Костки K из § 6 гл. I. Далее, в силу (6.3) гл. I и (6.1), (6.2)

$$M(Q, q) = M(P, m)^* = \left(K(t)^{-1} K\right)^* = K(t)' K^*,$$

где * обозначает обращение с транспонированием. Поскольку (§ 6 гл. I) K^* есть матрица оператора $\prod_{i<j}(1-R_{ij})$, из (2.15) следует, что

(6.3) *$K(t)'$ есть матрица оператора* $\prod_{i<j}(1-tR_{ij})^{-1}$.

Более того, правило (5.11′) для представления $P_\lambda(x;t)$ в виде суммы одночленов показывает, что

$$(K(t)^{-1}K)_{\lambda\mu}=\sum_T \psi_T(t), \tag{6.4}$$

где суммирование идет по таблицам T формы λ и веса μ.

Теперь легко вычислить таблицу матриц перехода между шестью базисами, перечисленными в (6.1); она показана на с. 165 справа ($b(t)$ обозначает диагональную матрицу из элементов $b_\lambda(t)$).

Ниже приведены матрицы $K(t)$ при $n\leqslant 5$.

Матрицу $K(t)$ при $n=6$ см. на стр. 165 слева.

	2	1^2
2	1	t
1^2		1

	3	21	1^3
3	1	t	t^3
21		1	$t+t^2$
1^3			1

	4	31	2^2	21^2	1^4
4	1	t	t^2	t^3	t^6
31		1	t	$t+t^2$	$t^3+t^4+t^5$
2^2			1	t	t^2+t^4
21^2				1	$t+t^2+t^3$
1^4					1

	5	41	32	31^2	2^21	21^3	1^5
5	1	t	t^2	t^3	t^4	t^6	t^{10}
41		1	t	$t+t^2$	t^2+t^3	$t^3+t^4+t^5$	$t^6+t^7+t^8+t^9$
32			1	t	$t+t^2$	$t^2+t^3+t^4$	$t^4+t^5+t^6+t^7+t^8$
31^2				1	t	$t+t^2+t^3$	$t^3+t^4+2t^5+t^6+t^7$
2^21					1	$t+t^2$	$t^2+t^3+t^4+t^5+t^6$
21^3						1	$t+t^2+t^3+t^4$
1^5							1

Эти матрицы наводят на мысль, что все коэффициенты многочленов $K_{\lambda\mu}(t)$ неотрицательны. Поскольку $K_{\lambda\mu}(1)=$ $=K_{\lambda\mu}$ — это число таблиц формы λ и веса μ ((6.4) гл. I), то Фулкс [10] предположил, что можно поставить в соответствие каждой такой таблице T неотрицательное целое число $c(T)$ так, чтобы

$$K_{\lambda\mu}(t)=\sum_T t^{c(T)},$$

где сумма берется по всем таблицам T формы λ и веса μ. Такое правило было недавно найдено Ласку и Шютценберже [27] и формулируется следующим образом.

Мы рассматриваем *слова* (или последовательности) $w = a_1 \ldots a_n$, в которых все a_i — положительные целые числа. *Весом* слова w называется последовательность $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$, где μ_i есть число членов a_j, равных i. Предположим, что $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots$, т. е. μ является *разбиением*. Если $\mu = (1^n)$ (так что w — некоторое перемешивание слова $12 \ldots n$), то будем называть w *стандартным* словом.

(i) Сначала предположим, что w — стандартное слово. Снабдим все элементы слова w *индексами* следующим образом: индекс числа 1 равен 0 и, если индекс числа r равен i, то индекс $r+1$ равен i или $i+1$ в зависимости от того, лежит оно справа или слева от r. Определим *заряд* $c(w)$ слова w как сумму всех его индексов.

(ii) Пусть теперь w — произвольное слово с единственным ограничением, что его вес должен быть разбиением μ. Извлечем из w стандартное слово следующим образом. Читая слово w слева направо, выберем первое встречающееся в нем число 1, затем первое 2, лежащее справа от выбранного 1, и т. д. Если на некотором шаге справа от выбранного числа s нет числа $s+1$, то возвращаемся к началу слова. Эта процедура выделяет из слова w стандартное подслово w_1 длины μ_1'. Вычеркнем теперь w_1 из w и повторим ту же процедуру для получения стандартного подслова w_2 (длины μ_2') и т. д. (Например, если $w = 32214113$, то подслово w_1 есть 2143, состоящее из подчеркнутых символов в w: $32\underline{2}\underline{1}\underline{4}11\underline{3}$. После удаления w_1 останется 3211, так что $w_2 = 321$ и $w_3 = 1$.)

Заряд слова w определяется как сумма зарядов выбранных стандартных подслов: $c(w) = \sum c(w_i)$. (В примере выше индексы (приписываемые снизу) суть $2_1 1_0 4_2 3_1$ для w_1, так что $c(w_1) = 4$, $3_2 2_1 1_0$ для w_2, так что $c(w_2) = 3$, и 1_0 для w_3, так что $c(w_3) = 0$: значит, $c(w) = 4 + 3 + 0 = 7$.)

(iii) Наконец, если T — таблица, то, читая ее элементы справа налево последовательно по строкам, начиная сверху (как в § 9 гл. I), мы получим слово $w(T)$, и *заряд* $c(T)$ таблицы T определяется как $c(w(T))$.

Теперь можно сформулировать теорему Ласку и Шютценберже:

(6.5) (i) *Имеем*

$$K_{\lambda\mu}(t) = \sum_T t^{c(T)},$$

где сумма берется по таблицам T формы λ и веса μ.

	o	51	42	41^2	3^2	321	31^3	2^3	2^21^2	21^4	1^6
6	1	t	t^2	t^3	t^3	t^4	t^6	t^6	t^7	t^{10}	t^{15}
51		1	t	$t+t^2$	t^2	t^2+t^3	$t^3+t^4+t^5$	t^4+t^5	$t^4+t^5+t^6$	$t^6+t^7+t^8+t^9$	$t^{10}+t^{11}+t^{12}+t^{13}+t^{14}$
42			1	t	t	$t+t^2$	$t^2+t^3+t^4$	$t^2+t^3+t^4$	$2t^3+t^4+t^5$	$t^4+t^5+2t^6+t^7+t^8$	$t^7+t^8+2t^9+t^{10}+2t^{11}+t^{12}+t^{13}$
41^2				1	0	t	$t+t^2+t^3$	t^3	$t^2+t^3+t^4$	$t^3+t^4+2t^5+t^6+t^7$	$t^6+t^7+2t^8+2t^9+2t^{10}+t^{11}+t^{12}$
3^2					1	t	t^3	t^3	t^2+t^4	$t^4+t^5+t^7$	$t^6+t^8+t^9+t^{10}+t^{12}$
321						1	$t+t^2$	$t+t^2$	$t+2t^2+t^3$	$t^2+2t^3+2t^4+2t^5+t^6$	$t^4+2t^5+2t^6+3t^7+3t^8+2t^9+2t^{10}+t^{11}$
31^3							1	0	t	$t+t^2+t^3+t^4$	$t^3+t^4+2t^5+2t^6+2t^7+t^8+t^9$
2^3								1	t	t^2+t^4	$t^3+t^5+t^6+t^7+t^9$
2^21^2									1	$t+t^2+t^3$	$t^2+t^3+2t^4+t^5+2t^6+t^7+t^8$
21^4										1	$t+t^2+t^3+t^4+t^5$
1^6											1

	m	q	P	Q	s	S
m	1	$K^{-1}K(t)b(t)^{-1}K(t)'K^*$	$K^{-1}K(t)$	$K^{-1}K(t)b(t)^{-1}$	K^{-1}	$K^{-1}K(t)b(t)^{-1}K(t)'$
q	$K'K(t)^*b(t)K(t)^{-1}K$	1	$K^{-1}K(t)^*b(t)$	$K'K(t)^*$	$K'K(t)^*b(t)K(t)^{-1}$	K'
P	$K(t)^{-1}K$	$b(t)^{-1}K(t)'K^*$	1	$b(t)^{-1}$	$K(t)^{-1}$	$b(t)^{-1}K(t)'$
Q	$b(t)K(t)^{-1}K$	$K(t)'K^*$	$b(t)$	1	$b(t)K(t)^{-1}$	$K(t)'$
s	K	$K(t)b(t)^{-1}K(t)'K^*$	$K(t)$	$K(t)b(t)^{-1}$	1	$K(t)b(t)^{-1}K(t)'$
S	$K(t)^*b(t)K(t)^{-1}K$	K^*	$K(t)b(t)$	$K(t)^*$	$K(t)^*b(t)K(t)^{-1}$	1

(ii) *При* $\lambda \geqslant \mu$ *многочлен* $K_{\lambda\mu}(t)$ *имеет степень* $n(\mu) - n(\lambda)$ *и старший коэффициент* 1 (*если* $\lambda \not\geqslant \mu$, *то мы уже знаем* (2.6), *что* $K_{\lambda\mu}(t) = 0$).

За доказательством (6.5) мы отсылаем к работе [47] (утверждение (6.5) (ii) легко следует из (6.3) (см. пример 4 ниже)).

Примеры

1. $K_{(n)\mu}(t) = t^{n(\mu)}$ для всех разбиений μ числа n. Это вытекает из тождества

$$h_n = \sum_{|\mu|=n} t^{n(\mu)} P_\mu$$

(пример 1 § 3, пример 1 § 4). Можно также воспользоваться (6.5).

2. $K_{\lambda(1^n)}(t) = t^{n(\lambda')}\varphi_n(t) H_\lambda(t)^{-1}$ для всех разбиений λ числа n, где $H_\lambda(t) = \prod_{x \in \lambda}(1 - t^{h(x)})$ — многочлен длин крюков. Это следует из примера 2 § 4, так как $K_{\lambda(1^n)}(t)$ — это коэффициент при $S_\lambda(x; t)$ в $Q_{(1^n)}(x; t) = \varphi_n(t) e_n(x)$.

В силу примера 14 § 5 гл. I

$$K_{\lambda(1^n)}(t) = \sum_T t^{c'(T)},$$

где сумма берется по всем стандартным таблицам T формы λ, а $c'(T)$ есть сумма положительных целых $i < n$, таких, что $i+1$ лежит в таблице T правее, чем i.

3. Таблицы многочленов $K_{\lambda\mu}(t)$ подсказывают следующую гипотезу: если *наименьшая* степень t, присутствующая в $K_{\lambda\mu}(t)$, есть $t^{a(\lambda,\mu)}$, то $a(\lambda, \mu) = a(\mu', \lambda')$.

4. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — стандартный базис в Z^n; обозначим через R^+ множество векторов $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Для каждого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in Z^n$, такого, что $\sum \xi_i = 0$, положим

$$P(\xi; t) = \sum_{(m_\alpha)} t^{\sum m_\alpha},$$

где суммирование идет по всем семействам $(m_\alpha)_{\alpha \in R^+}$ неотрицательных целых чисел, таких, что $\xi = \sum m_\alpha \alpha$. Многочлен $P(\xi; t)$ будет ненулевым тогда и только тогда, когда $\xi = \sum_{1}^{n-1} \eta_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$, где все η_i больше или равны 0; в этом случае он имеет степень $\sum \eta_i$ и старший коэффициент 1. Так как $\eta_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, то степень $P(\xi; t)$ равна $\sum (n-i)\xi_i = \langle \xi, \delta \rangle$, где, как обычно, $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, а скалярное произведение стандартно.

Далее, в силу (6.3) $K(t)_{\lambda\mu}$ есть коэффициент при s_λ в

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 + tR_{ij} + t^2R_{ij}^2 + \ldots)\, s_\mu,$$

а значит, коэффициент при $a_{\lambda+\delta}$ в

$$\sum_{(m_\alpha)} t^{\sum m_\alpha} a_{\mu+\delta+\sum m_\alpha \alpha},$$

или, что эквивалентно, коэффициент при $x^{\lambda+\delta}$ в

$$\sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \sum_{(m_\alpha)} t^{\sum m_\alpha} x^{w(\mu+\delta+\sum m_\alpha \alpha)}.$$

Отсюда следует, что

(1) $$K(t)_{\lambda\mu} = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) P(w^{-1}(\lambda+\delta)-(\mu+\delta);\ t).$$

Но

$$\langle w^{-1}(\lambda+\delta)-(\mu+\delta),\ \delta\rangle = \langle\lambda+\delta,\ w\delta\rangle - \langle\mu+\delta,\ \delta\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle\lambda+\delta,\ \delta\rangle - \langle\mu+\delta,\ \delta\rangle = n(\mu)-n(\lambda),$$

причем равенство выполняется лишь при $w=1$. Поэтому главным членом в сумме (1) является слагаемое, соответствующее $w=1$, и, следовательно, многочлен $K(t)_{\lambda\mu}$ имеет степень $n(\mu)-n(\lambda)$ и старший коэффициент 1.

5°. Из таблиц этого параграфа и § 6 гл. I видно, что

$$M(e,\ P) = M(e,\ s)\,M(s,\ P) = K'JK(t)$$

или, иначе говоря, что

(1) $$M(e,\ P)_{\lambda\mu} = \sum_\nu K(t)_{\nu\mu} K_{\nu'\lambda}.$$

С другой стороны, формула (1) из приложения к гл. II показывает, что

(2) $$M(e,\ P)_{\lambda\mu} = \sum_A t^{\tilde d(A)},$$

где сумма берется по всем массивам A формы μ и веса λ, строго упорядоченным по строкам, а функция $\tilde d(A)$ определена в (AT.5) (см. приложение к гл. II).

Сопоставляя (1) и (2), мы видим, что гипотеза Фулкса эквивалентна следующему комбинаторному утверждению: *для любых двух разбиений λ и μ существует биекция φ между парами таблиц $(T,\ T')$, формы которых сопряжены, а веса равны соответственно μ и λ, с одной стороны, и массивами формы μ и веса λ, строго упорядоченными по строкам, с другой стороны, такая, что $\tilde d(\varphi(T,\ T'))$ не зависит от T'*. В самом деле, полагая $c(T) = \tilde d(\varphi(T,\ T'))$, мы видим, что

$$K(t)_{\lambda\mu} = \sum_T t^{c(T)},$$

где сумма берется по таблицам T формы λ и веса μ.

Было бы интересно явно построить биекцию φ.

6°. Недавно Люстиг [13°] получил следующую геометрическую интерпретацию многочленов $K_{\lambda\mu}(t)$. Пусть V — некоторое n-мерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k. Классы сопряженности унипотентных операторов в V параметризуются разбиениями числа n: класс c_λ состоит из операторов, имеющих жордановы клетки порядков $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$. Замыкание $\bar c_\lambda$ есть алгебраическое многообразие (вообще го-

воря, особое) размерности $n(n-1)-2n(\lambda)$, причем

$$\bar{c}_\lambda = \bigcup_{\mu \leqslant \lambda} c_\mu.$$

Пусть $x \in c_\mu \subset \bar{c}_\lambda$. Обозначим через $\mathcal{H}^i(\bar{c}_\lambda)$ когомологические пучки Делиня — Горески — Макферсона многообразия $\bar{c}_\lambda$ (см., например, [13°]), и пусть $\mathcal{H}^i(\bar{c}_\lambda)_x$ — слой пучка $\mathcal{H}^i(\bar{c}_\lambda)$ в точке x. Тогда пучки $\mathcal{H}^i(\bar{c}_\lambda)$ равны 0 при нечетных i, и

$$\sum_{i \geqslant 0} t^i \dim \mathcal{H}^{2i}(\bar{c}_\lambda)_x = t^{n(\mu)-n(\lambda)} K_{\lambda\mu}(t^{-1}).$$

Это дает другое доказательство (6.5) (ii), а также того факта, что все коэффициенты многочлена $K_{\lambda\mu}(t)$ неотрицательны. Было бы интересно получить геометрическую интерпретацию теоремы Ласку — Шютценберже (6.5) (i).

7. Многочлены Грина

Обозначим через $X(t)$ матрицу перехода $M(p, P)$ между произведениями степенных сумм p_ρ и HL-функциями P_λ:

(7.1) $$p_\rho(x) = \sum_\lambda X_\rho^\lambda(t) P_\lambda(x;\, t)$$

(так что ρ есть индекс строки, а λ — столбца). В силу (2.7) $X_\rho^\lambda(t) \in Z[t]$, и он равен нулю, за исключением случая, когда $|\lambda| = |\rho|$. При $t = 0$ имеем $P_\lambda(x;\, 0) = s_\lambda(x)$, так что в силу (7.8) гл. I

(7.2) $$X_\rho^\lambda(0) = \chi_\rho^\lambda$$

есть значение неприводимого характера χ^λ группы S_n на элементах циклового типа ρ.

Из (4.1) и (4.4) получаем

$$\sum_{|\rho|=n} z_\rho(t)^{-1} p_\rho(x) p_\rho(y) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda(t) P_\lambda(x;\, t) P_\lambda(y;\, t).$$

Подставляя (7.1) в это соотношение, приходим к равенству

(7.3) $$X'(t) z(t)^{-1} X(t) = b(t),$$

где $X'(t)$ — транспонированная матрица к матрице $X(t)$, а $b(t)$ (соответственно $z(t)$) — диагональная матрица с элементами $b_\lambda(t)$ (соответственно $z_\lambda(t)$). Эквивалентной формой равенства (7.3) является

(7.4) $$X(t) b(t)^{-1} X'(t) = z(t).$$

Другими словами, выполняются *соотношения ортогональности*

(7.3′) $$\sum_{|\rho|=n} z_\rho(t)^{-1} X_\rho^\lambda(t) X_\rho^\mu(t) = \delta_{\lambda\mu} b_\lambda(t),$$

(7.4′) $$\sum_{|\lambda|=n} b_\lambda(t)^{-1} X_\rho^\lambda(t) X_\sigma^\lambda(t) = \delta_{\rho\sigma} z_\rho(t),$$

сводящиеся при $t=0$ к соотношениям ортогональности для характеров симметрической группы S_n.

Поскольку в силу (7.3) $X(t)^{-1}=b(t)^{-1}X'(t)z(t)^{-1}$, то, разрешая уравнения (7.1), мы получим

(7.5) $$Q_\lambda(x;\,t)=\sum_\rho z_\rho(t)^{-1}X^\lambda_\rho(t)\,p_\rho(x).$$

Далее, поскольку $M(s,P)=M(p,s)^{-1}M(p,P)$, то $K(t)=X(0)^{-1}X(t)$, так что

(7.6) $$X(t)=X(0)\,K(t),$$

или, более явно, используя (7.2), получаем

(7.6′) $$X^\mu_\rho(t)=\sum_\lambda \chi^\lambda_\rho K_{\lambda\mu}(t).$$

Поскольку многочлен $K_{\lambda\mu}(t)$ имеет степень $n(\mu)-n(\lambda)\leqslant n(\mu)$ и старший коэффициент 1 (6.5), то старший член в правой части (7.6′) есть $\chi^{(n)}_\rho K_{(n)\mu}(t)=t^{n(\mu)}$ (пример 1 § 6), так что

(7.7) *Многочлен* $X^\mu_\rho(t)$ *имеет степень* $n(\mu)$ *и старший коэффициент* 1.

Многочлены Грина $Q^\lambda_\rho(q)$ определяются формулой

(7.8) $$Q^\lambda_\rho(q)=q^{n(\lambda)}X^\lambda_\rho(q^{-1}).$$

Через эти многочлены соотношения ортогональности (7.3′) и (7.4′) выражаются следующим образом:

(7.9) $$\sum_{|\rho|=n} y_\rho(q)^{-1}Q^\lambda_\rho(q)\,Q^\mu_\rho(q)=\delta_{\lambda\mu}a_\lambda(q),$$

(7.10) $$\sum_{|\lambda|=n} a_\lambda(q)^{-1}Q^\lambda_\rho(q)\,Q^\lambda_\sigma(q)=\delta_{\rho\sigma}y_\rho(q),$$

где
$$a_\lambda(q)=q^{|\lambda|+2n(\lambda)}b_\lambda(q^{-1}),\qquad y_\rho(q)=q^{-|\rho|}z_\rho(q^{-1})$$
(гл. II, (1.6)).

Кроме того, (7.6′) превращается в

(7.11) $$Q^\mu_\rho(q)=\sum_\lambda \chi^\lambda_\rho\,\tilde K_{\lambda\mu}(q),$$

где

$\tilde K_{\lambda\mu}(q)=q^{n(\mu)}K_{\lambda\mu}(q^{-1})=q^{n(\lambda)}+$ члены более высокой степени

в силу (6.5).

Примеры

1. $X^{(n)}_\rho(t)=1$ для всех разбиений ρ числа n. Это частный случай (7.7). Эквивалентным образом, $Q^{(n)}_\rho(q)=1$.

2. $X^\lambda_{(n)}(t) = t^{n(\lambda)}\varphi_{l(\lambda)-1}(t^{-1})$, или, что эквивалентно, $Q^\lambda_{(n)}(q) = \varphi_{l(\lambda)-1}(q)$. Это следует из тождества (3) примера 1 § 3:

$$\prod_{i\geqslant 1}(1-x_iy)/(1-x_i) = \sum_\lambda t^{n(\lambda)}\prod_{j=1}^{l(\lambda)}(1-t^{1-j}y)\cdot P_\lambda(x;t).$$

Разделим обе части на $1-y$, и пусть $y\to 1$: так как

$$\lim_{y\to 1}\frac{1}{1-y}\left(\prod_i\frac{1-x_iy}{1-x_i}-1\right) = \sum_i\frac{x_i}{1-x_i} = \sum_{n\geqslant 1}p_n(x)$$

то

$$p_n(x) = \sum_{|\lambda|=n} t^{n(\lambda)}\prod_1^{l(\lambda)-1}(1-t^{-i})\,P_\lambda(x;t),$$

что и дает требуемый результат.

3. $X^{(1^n)}_\rho(t) = \prod_{i=1}^n(t^i-1)\Big/\prod_{j\geqslant 1}(t^{\rho_j}-1)$, или, что эквивалентно, $Q^{(1^n)}_\rho(q) = \varphi_n(q)\Big/\prod_{j\geqslant 1}(1-q^{\rho_j})$. Это вытекает из (7.5) с $\lambda=(1^n)$: так как $Q_{(1^n)}(x;t) = \varphi_n(t)\,e_n(x)$, то

$$\sum_\rho z_\rho(t)^{-1}X^{(1^n)}_\rho(t)\,p_\rho(x) = \varphi_n(t)\,e_n(x) = \varphi_n(t)\sum_\rho\varepsilon_\rho z_\rho^{-1}p_\rho(x),$$

так что $X^{(1^n)}_\rho(t) = \varepsilon_\rho z_\rho^{-1}z_\rho(t)\,\varphi_n(t)$, а это эквивалентно нашему утверждению.

4. $X^\lambda_{(1^n)}(t) = (1-t)^{-n}\sum_T\varphi_T(t)$, где суммирование идет по всем стандартным таблицам T формы λ ($\varphi_T(t)$ было определено в (5.9)).

В самом деле, в силу (7.1)

$$X^\lambda_{(1^n)}(t) = \langle Q_\lambda, p_1^n\rangle = (1-t)^{-n}\langle Q_\lambda, q_1^n\rangle = (1-t)^{-n}\sum_T\varphi_T(t),$$

согласно (4.8) и (5.11).

5. Беря в (7.5) $x_i = t^{i-1}$, мы получим в силу примера 1 § 2

$$t^{n(\lambda)} = \sum_\rho z_\rho^{-1}X^\lambda_\rho(t),$$

или, через многочлены Грина,

$$\sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1}Q^\lambda_\rho(q) = 1$$

для всех разбиений λ числа n.

6. $X^\lambda_\rho(1) = \langle p_\rho, h_\lambda\rangle$ (для скалярного произведения из гл. I), т. е. это значение индуцированного характера $\operatorname{ind}_{S_\lambda}^{S_n}(1)$ на элементах типа ρ.

7. Пусть ω — примитивный корень степени r из единицы ($r\geqslant 2$); посмотрим, к чему приведет замена t на ω. Пусть $K_r = \mathbf{Q}(\omega)$ есть r-е круговое поле, а $\mathfrak{O}_r = \mathbf{Z}[\omega]$ — его кольцо целых. В силу (2.7) элементы $P_\lambda(x;\omega)$ образуют $\mathfrak{O}$-базис в кольце $\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}}\mathfrak{O}_r$. С другой стороны, определение (2.12) многочленов $b_\lambda(t)$ показывает, что $b_\lambda(\omega)$, а значит, и $Q_\lambda(x;\omega)$ обращаются в нуль, если $m_i(\lambda)\geqslant r$ для некоторого i, т. е. если разбиение λ имеет r или больше одинаковых частей. Обозначим через

$\mathscr{P}_{(r)}$ множество разбиений λ, таких, что $m_i(\lambda) < r$ для всех i, и пусть $\Lambda_{(r)}$ есть $\mathfrak{O}$-подмодуль в $\Lambda \otimes_Z \mathcal{O}_r$, порожденный элементами $P_\lambda(x;\omega)$ с $\lambda \in \mathscr{P}_{(r)}$. Тогда $\Lambda_{(r)}$ является $\mathfrak{O}_r$-подалгеброй в $\Lambda \otimes_Z \mathcal{O}_r$.

Пусть $A_{(r)} = \Lambda_{(r)} \otimes_{\mathcal{O}_r} K_r$ — векторное K_r-пространство, свободно порожденное элементами $Q_\lambda(x;\omega)$, такими, что $\lambda \in \mathscr{P}_{(r)}$. Поскольку $z_\rho(\omega)^{-1} = z_\rho^{-1} \prod_{l \geqslant 1} \left(1-\omega^{\rho_l}\right)$ обращается в нуль, если какое-нибудь ρ_l кратно r, то из (7.5) вытекает, что $A_{(r)}$ содержится в K_r-алгебре $B_{(r)}$, порожденной степенными суммами p_n, такими, что n не делится на r. Если теперь $A^n_{(r)}$, $B^n_{(r)}$ — компоненты степени n в $A_{(r)}$ и $B_{(r)}$ соответственно, то из сказанного ясно, что $\sum_{n \geqslant 0} \dim A^n_{(r)} \cdot u^n$ есть производящая функция для разбиений λ, у которых ни одна из частей не повторяется более $r-1$ раз, так что

(1) $$\sum_{n \geqslant 0} \dim A^n_{(r)} \cdot u^n = \prod_{i \geqslant 1} \left(1 + u^i + \ldots + u^{(r-1)i}\right) = \prod_{i \geqslant 1} (1-u^{ri})/(1-u^i),$$

а $\sum_{n \geqslant 0} \dim B^n_{(r)} \cdot u^n$ — производящая функция для разбиений ρ, никакая часть которых не делится на r, так что

(2) $$\sum_{n \geqslant 0} \dim B^n_{(r)} \cdot u^n = \prod_{\substack{i \geqslant 1 \\ i \not\equiv 0\ (r)}} (1-u^i)^{-1}.$$

Из (1) и (2) вытекает, что $\dim A^n_{(r)} = \dim B^n_{(r)}$, откуда $A_{(r)} = B_{(r)}$; значит, $A_{(r)}$ является *K_r-алгеброй*, и, следовательно, $\Lambda_{(r)}$ есть *$\mathfrak{O}_r$-алгебра*, что и утверждалось.

Скалярное произведение, определенное в § 4, невырожденно на $\Lambda_{(r)}$, и соотношения ортогональности (7.3′), (7.4′) являются теперь соотношениями ортогональности для матрицы $X^\lambda_\rho(\omega)$, где λ пробегает разбиения числа n, у которых ни одна из частей не повторяется r или больше раз, а ρ — разбиения числа n, не имеющие частей, кратных r.

8. Случай $t = -1$ представляет особый интерес. В этом случае $Q_\lambda(x; -1) = 0$, если не все части разбиения λ различны. Симметрические функции $Q_\lambda(x; -1)$ были введены Шуром [45] в связи с проективными представлениями симметрических групп.

В силу примера 4

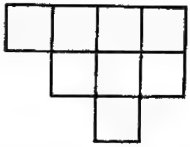
$$X^\lambda_{(1^n)}(-1) = 2^{-n} \sum_T \varphi_T(-1),$$

где сумма берется по всем стандартным таблицам T формы λ. Из определения (5.9) многочленов $\varphi_T(t)$ ясно, что $\varphi_T(-1) = 0$, если на каком-нибудь шаге в диаграмме $\lambda^{(i)}$, образованной числами $1, 2, \ldots, i$ в таблице T, есть две строки одинаковой длины. Отсюда следует, что $X^\lambda_{(1^n)}(-1)$ равно числу последовательностей разбиений

$$0 = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(n)} = \lambda,$$

таких, что $|\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}| = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и что все части каждого из разбиений $\lambda^{(i)}$ различны. В частности, $X^\lambda_{(1^n)}(-1) = 0$, если не все части разбиения λ различны.

Этот результат можно переформулировать следующим образом. Если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ с $\lambda_1 > \ldots > \lambda_r > 0$, то *сдвинутая диаграмма* $S(\lambda)$ разбиения λ получается из диаграммы этого разбиения в обычном смысле сдвигом i-й строки на $i-1$ квадратов вправо при всех $i > 1$. Эквивалентно, $S(\lambda)$ есть часть диаграммы разбиения $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \mid \lambda_1 - 1, \ldots \ldots, \lambda_r - 1)$ (обозначение Фробениуса из § 1 гл. I), лежащая над диагональю. Например, сдвинутая диаграмма разбиения $\lambda = (431)$ есть



Сдвинутая стандартная таблица формы λ получается заполнением квадратов сдвинутой диаграммы λ числами 1, 2, ... так, чтобы числа строго возрастали при чтении слева направо по строкам и сверху вниз по столбцам. Тогда $X^{\mu}_{(1^n)}(-1)$ есть число g^λ сдвинутых стандартных таблиц формы λ (всегда предполагается, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$).

Как и в случае обыкновенных стандартных таблиц (гл. I, § 5, пример 2), существует формула, выражающая g^λ через длины крюков. Для каждого квадрата x в $S(\lambda)$ *длина крюка* $h(x)$ определяется как длина крюка для x в диаграмме $\tilde{\lambda}$. Укажем длины крюков в приведенном выше примере:

	7	5	4	2
		4	3	1
			1	

Тогда

$$g^\lambda = n! / \prod_{x \in S(\lambda)} h(x), \tag{1}$$

если $|\lambda| = n$.

Формула (1) эквивалентна следующей формуле, принадлежащей Шуру (цит. выше):

$$g^\lambda = \frac{n!}{\lambda!} \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}, \tag{2}$$

где $\lambda! = \lambda_1! \lambda_2! \ldots$. Эквивалентность (1) и (2) вытекает из того, что числа $h(x)$ при x из i-й строки $S(\lambda)$ суть $\lambda_i + \lambda_{i+1}$, $\lambda_i + \lambda_{i+2}$, ... и λ_i, $\lambda_i - 1$, ..., 1 с пропуском чисел $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, $\lambda_i - \lambda_{i+2}$, ...

Так как числа g^λ, очевидно, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$g^\lambda = \sum_{i \geq j} g^{\lambda^{(i)}},$$

где $\lambda^{(i)}$ — разбиение, получаемое из λ заменой λ_i на $\lambda_i - 1$, то доказательство (2) сводится к проверке тождества

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j - 1} \cdot \frac{\lambda_i - \lambda_j - 1}{\lambda_i - \lambda_j},$$

которое можно доказать, рассматривая разложение на простейшие дроби функции

$$(2t - 1) \prod_i \frac{(t + \lambda_i)(t - \lambda_i - 1)}{(t + \lambda_i - 1)(t - \lambda_i)}.$$

9. Запишем

(1) $$Q_\rho^\mu(q) = \sum_i \psi^{\mu, i}(\rho)\, q^i \qquad (|\mu| = |\rho| = n),$$

где коэффициенты $\psi^{\mu, i}$ могут рассматриваться как центральные функции на S_n. Хотта и Спрингер [19] показали, что $\psi^{\mu, i}$ является *характером* группы S_n для всех разбиений μ числа n: они определили действие S_n в рациональных когомологиях $H^*(X_\mu)$ многообразия X_μ (гл. II, § 3, пример) и показали, что

$$\psi^{\mu, i}(w) = \varepsilon(w) \operatorname{trace}\left(w^{-1}, H^{2i}(X_\mu)\right),$$

где $\varepsilon(w)$ есть, как обычно, знак перестановки $w \in S_n$.

Если

(2) $$\psi^{\mu, i} = \sum_\lambda k_{\lambda\mu}^{(i)} \chi^\lambda$$

— разложение $\psi^{\mu, i}$ в сумму неприводимых характеров, то из (1), (2) и (7.11) вытекает, что

$$\tilde{K}_{\lambda\mu}(q) = \sum_i k_{\lambda\mu}^{(i)} q^i,$$

причем коэффициенты $k_{\lambda\mu}^{(i)}$ — целые числа $\geqslant 0$ [1]).

Когда $\rho = (1^n)$, то $Q_{(1^n)}^\mu(q)$ — это многочлен Пуанкаре многообразия X_μ. Если q есть степень простого числа, то $Q_{(1^n)}^\mu(q) = |X_\mu(q)|$ — число $\mathbb{F}_q$-рациональных точек многообразия X_μ.

Замечания и библиографические указания

Многочлены $Q_\rho^\lambda(q)$ были введены Грином [14], доказавшим соотношения ортогональности (7.9), (7.10). Таблицы этих многочленов см. у Грина (цит. выше) для $n \leqslant 5$ и у Морриса [36] для $n = 6, 7$.

---

[1]) Представлениям $\psi^{\mu, i}$ и их обобщениям посвящен ряд недавних работ. Отметим работу Борхо и Макферсона [5°], в которой вскрыта их связь с пучками Делиня — Горески — Макферсона на замыканиях унипотентных классов (пример 6° § 6). — *Прим. перев.*

Глава IV

ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ GL_n НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

1. Группы L и M

Пусть k — конечное поле из q элементов, а $\bar{k}$ — его алгебраическое замыкание. Пусть

$$F\colon x \longmapsto x^q$$

— автоморфизм Фробениуса поля $\bar{k}$ над k. Для каждого $n \geqslant 1$ множество k_n неподвижных точек автоморфизма F^n в $\bar{k}$ является единственным расширением поля k степени n в $\bar{k}$.

Обозначим через M мультипликативную группу поля $\bar{k}$ и через M_n мультипликативную группу поля k_n, так что $M_n = M^{F^n}$.

Если m делит n, то норменное отображение $N_{n,m}\colon M_n \to M_m$, определенное формулой

$$N_{n,m}(x) = x^{(q^n-1)/(q^m-1)} = \prod_{i=0}^{d-1} F^{mi}x,$$

где $d = n/m$, является сюръективным гомоморфизмом. Группы M_n и гомоморфизмы $N_{n,m}$ образуют проективную систему. Пусть

$$K = \varprojlim M_n$$

— их проективный предел; это проконечная группа. Группа характеров группы K есть, таким образом, дискретная группа

$$\hat{K} = L = \varinjlim \hat{M}_n,$$

где $\hat{M}_n$ — группа характеров группы M_n. Когда m делит n, группа $\hat{M}_m$ вложена в $\hat{M}_n$ с помощью отображения, сопряженного к норменному гомоморфизму $N_{n,m}$.

Обе группы L и M (неканонически) изоморфны группе корней из единицы в $\mathbb{C}$, порядок которых взаимно прост с $p = \operatorname{char} k$.

На L действует отображение Фробениуса $F\colon \xi \longmapsto \xi^q$. Для каждого $n \geqslant 1$ пусть $L_n = L^{F^n}$ есть группа элементов $\xi \in L$, неподвижных относительно F^n, так что $L = \bigcup_{n \geqslant 1} L_n$ и $L_m \subset L_n$ тогда и только тогда, когда m делит n. Каноническое отображение $\hat{M}_n$ в L является изоморфизмом $\hat{M}_n$ на L_n. Отождеств-

ляя $\hat{M}_n$ с L_n с помощью этого изоморфизма, мы определяем спаривание L_n с M_n:

$$\langle \xi, x\rangle_n = \xi(x)$$

для $\xi \in L_n$ и $x \in M_n$ (индекс n необходим, поскольку эти спаривания при различных n не согласованы: если m делит n и $\xi \in L_m$, $x \in M_m$, то $\langle \xi, x\rangle_n = (\langle \xi, x\rangle_m)^{n/m}$).

Наконец, обозначим через Φ множество F-орбит в M. Каждая такая орбита имеет вид $\{x, x^q, \ldots, x^{q^{d-1}}\}$, где $x^{q^d} = x$, и многочлен

$$f = \prod_{i=0}^{d-1} (t - x^{q^i})$$

лежит в $k[t]$ и неприводим над k. Обратно, каждый неприводимый многочлен $f \in k[t]$ со старшим коэффициентом единица, за исключением многочлена t, определяет таким образом F-орбиту в M. Поэтому мы будем обозначать одной и той же буквой f и многочлен, и орбиту, состоящую из его корней в $\bar{k}$, и обозначим также через Φ множество этих неприводимых многочленов.

Замечание. Для каждого $n \geqslant 1$ пусть $\mu_n = (Z/nZ)(1)(\bar{k})$ — группа корней n-й степени из единицы в $\bar{k}$; положим

$$\hat{Z}(1)(\bar{k}) = \varprojlim \mu_n,$$

где предел берется по отношению к гомоморфизмам $\mu_n \to \mu_m$: $x \mapsto x^{n/m}$, определенным, когда m делит n ([8], § 2). Группа

$$\hat{Z}(1)(\bar{k}) = K = \hat{L}$$

есть группа характеров группы L, так что $\hat{L}$ является $\hat{Z}$-модулем, где $\hat{Z} = \varprojlim (Z/nZ) = \prod_p Z_p$ (прямое произведение по всем простым p).

Пусть $\hat{M}$ — группа характеров группы M. Тогда

$$\hat{M} \cong \mathrm{Hom}_{\hat{Z}}(\hat{L}, \hat{Z}), \qquad \hat{L} \cong \mathrm{Hom}_{\hat{Z}}(\hat{M}, \hat{Z})$$

и, следовательно, $\hat{M} = \hat{Z}(-1)(\bar{k})$.

Кроме того,

$$M \cong (Q/Z) \otimes_{\hat{Z}} \hat{L} = (Q/Z)(1)(\bar{k}), \quad L \cong (Q/Z) \otimes_{\hat{Z}} \hat{M} = (Q/Z)(-1)(\bar{k}).$$

2. Классы сопряженности

Обозначим через G_n группу $GL_n(k)$ обратимых $n \times n$-матриц над конечным полем k. Каждый элемент $g \in G_n$ действует на векторном пространстве k^n, а значит, определяет на k^n структуру $k[t]$-модуля, такую, что $t \cdot v = gv$ для $v \in k^n$. Бу-

дем обозначать этот $k[t]$-модуль через V_g. Ясно, что два элемента $g, h \in G_n$ сопряжены в G_n тогда и только тогда, когда V_g и V_h — изоморфные $k[t]$-модули. Мы можем, следовательно, писать V_c вместо V_g, где c — класс сопряженности элемента g в G_n. Классы сопряженности в G_n находятся, таким образом, во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма $k[t]$-модулей V, таких, что (i) $\dim_k V = n$ и (ii) из $tv = 0$ следует, что $v = 0$.

Поскольку $k[t]$ — целостное кольцо главных идеалов, модуль $V = V_c$ является прямой суммой циклических модулей вида $k[t]/(f)^m$, где $m \geqslant 1$, $f \in \Phi$ и (f) — идеал в $k[t]$, порожденный многочленом f. Значит, V ставит в соответствие каждому $f \in \Phi$ *разбиение* $\mu(f) = (\mu_1(f), \mu_2(f), \ldots)$, такое, что

$$V \cong \bigoplus_{f,\, i} k[t]/(f)^{\mu_i(f)}. \tag{2.1}$$

Другими словами, V определяет функцию μ на Φ со значениями в разбиениях. Поскольку $\dim_k k[t]/(f)^{\mu_i(f)} = d(f)\,\mu_i(f)$, где $d(f)$ — степень многочлена f, отсюда следует, что μ должна удовлетворять условию

$$\|\mu\| = \sum_{f \in \Phi} d(f)\,|\mu(f)| = n. \tag{2.2}$$

Обратно, каждая функция $\mu\colon \Phi \to \mathscr{P}$ (где $\mathscr{P}$ — множество всех разбиений), удовлетворяющая (2.2), определяет посредством (2.1) $k[t]$-модуль V размерности n, а значит, и класс сопряженности c_μ в G_n. Мы будем писать V_μ вместо V_{c_μ}.

Для каждого $f \in \Phi$ обозначим через $V_{(f)}$ f-примарную компоненту модуля $V = V_\mu$, т. е. подмодуль, состоящий из всех $v \in V$, аннулируемых некоторой степенью f. В обозначениях (2.1)

$$V_{(f)} \cong \bigoplus_{i} k[t]/(f)^{\mu_i(f)}. \tag{2.3}$$

Все $V_{(f)}$ являются характеристическими подмодулями в V, и V есть их прямая сумма. Значит, если обозначить через $\mathrm{Latt}(M)$ решетку подмодулей модуля M, а через $\mathrm{Aut}(M)$ — его группу автоморфизмов, то

$$\mathrm{Latt}(V) \cong \prod_{f \in \Phi} \mathrm{Latt}(V_{(f)}), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Aut}(V) \cong \prod_{f \in \Phi} \mathrm{Aut}(V_{(f)}). \tag{2.5}$$

Обозначим через $k[t]_{(f)}$ локализацию $k[t]$ относительно простого идеала (f), т. е. кольцо частных u/v, где $u, v \in k[t]$ и $v \notin (f)$. Тогда $k[t]_{(f)}$ является дискретно нормированным кольцом с полем вычетов $k_f = k[t]/(f)$, имеющим степень

$d(f)$ над k, а $V_{(f)}$ — конечным $k[t]_{(f)}$-модулем типа $\mu(f)$ в силу (2.3). Значит, в силу (1.6) гл. II

(2.6) $$|\operatorname{Aut}(V_{(f)})| = a_{\mu(f)}(q_f),$$

где $q_f = \operatorname{card}(k_f) = q^{d(f)}$, и для каждого разбиения λ

$$a_\lambda(q) = q^{|\lambda|+2n(\lambda)} b_\lambda(q^{-1}).$$

Для каждого $g \in G_n$ автоморфизмы $k[t]$-модуля V_g — это в точности элементы $h \in G_n$, коммутирующие с g, т. е. $\operatorname{Aut}(V_g)$ есть *централизатор* g в G_n. Значит, в силу (2.5) и (2.6) централизатор каждого элемента $g \in c_\mu$ в группе G_n имеет порядок

(2.7) $$a_\mu = \prod_{f \in \Phi} a_{\mu(f)}(q_f).$$

Примеры

1. Для каждого многочлена $f \in \Phi$ вида $f = t^d - \sum_{i=1}^{d} a_i t^{i-1}$ обозначим через $J(f)$ его «сопровождающую матрицу»:

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_d \end{pmatrix}$$

и для каждого целого $m \geqslant 1$ положим

$$J_m(f) = \begin{pmatrix} J(f) & 1_d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J(f) & 1_d & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J(f) \end{pmatrix},$$

где по диагонали стоит m блоков $J(f)$. Тогда нормальной формой элементов класса сопряженности c_μ будет матрица, составленная из диагональных блоков $J_{\mu_i(f)}(f)$ для всех $i \geqslant 1$ и $f \in \Phi$.

2. Иногда бывает более удобно рассматривать $\mu\colon \Phi \to \mathscr{P}$ как функцию на M, т. е. мы определяем $\mu(x)$ для каждого $x \in M$ как разбиение $\mu(f)$, где f есть F-орбита элемента x (или его минимальный многочлен над k). Таким образом,

$$\|\mu\| = \sum_{f \in \Phi} d(f)\,|\mu(f)| = \sum_{x \in M} |\mu(x)|$$

и $\mu \circ F = \mu$. В этих обозначениях характеристический многочлен любого элемента $g \in c_\mu$ имеет вид

$$\prod_{f \in \Phi} f^{|\mu(f)|} = \prod_{x \in M} (t-x)^{|\mu(x)|},$$

откуда, в частности, следует, что

$$\operatorname{trace}(g) = \sum_{x \in M} |\mu(x)|\,x, \qquad \det(g) = \prod_{x \in M} x^{|\mu(x)|}.$$

3. Назовем *носителем* $\mathrm{Supp}(\mu)$ функции μ: $\Phi \to \mathcal{P}$ множество тех $f \in \Phi$, для которых $\mu(f) \neq 0$. Пусть $g \in c_\mu$. Тогда

(i) g унипотентен $\Leftrightarrow \mathrm{Supp}(\mu)$ состоит из многочлена $t-1$.

(ii) g примарен $\Leftrightarrow \mathrm{Supp}(\mu) = \{f\}$ для некоторого $f \in \Phi$.

(iii) g регулярен $\Leftrightarrow \mu(f)$ имеет длину $\leqslant 1$ для всех $f \in \Phi$.

(iv) g полупрост $\Leftrightarrow \mu(f)'$ имеет длину $\leqslant 1$ для всех $f \in \Phi$.

(v) g регулярен и полупрост $\Leftrightarrow \mu(f) = 0$ или (1) для всех $f \in \Phi$.

4. Пусть k_n — единственное расширение степени n поля k, и пусть α: $k_n \to k^n$ — некоторый изоморфизм векторных пространств над k. Для каждого $x \in M_n$ умножение на x определяет обратимое k-линейное отображение $k_n \to k_n$, а значит, и элемент $\tau(x) \in G_n$, а именно $\tau(x)v = \alpha(x(\alpha^{-1}v))$ при $v \in k^n$. Так определенное отображение τ: $M_n \to G_n$ является инъективным гомоморфизмом, так что $T_n = \tau(M_n)$ — это подгруппа G_n, изоморфная M_n. При изменении изоморфизма α подгруппа T_n заменится на сопряженную. Каждый элемент $\tau(x) \in T_n$ полупрост, и его собственными значениями служат $F^i x$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Поэтому если минимальный многочлен элемента x есть f_x и $d = d(f_x)$, то класс сопряженности элемента $\tau(x)$ в G_n есть c_μ, где $\mu(f_x) = (1^{n/d})$ и $\mu(f) = 0$ при $f \neq f_x$.

Пусть теперь $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$ — произвольное разбиение числа n. Тогда $T_\nu = T_{\nu_1} \times \ldots \times T_{\nu_r}$ является подгруппой в $G_{\nu_1} \times \ldots \times G_{\nu_r}$, а значит, и в G_n, корректно определенной с точностью до сопряженности в G_n. Пусть N_ν — нормализатор T_ν и $W_\nu = N_\nu / T_\nu$. Тогда группа W_ν изоморфна централизатору элемента циклового типа ν в симметрической группе S_n. В частности, группа W_n является циклической группой порядка n и получается переносом группы $\mathrm{Gal}(k_n/k)$ с помощью изоморфизма α.

Группы T_ν (с точностью до сопряженности в G_n) — это «максимальные торы» в G_n. Каждый полупростой элемент в G_n лежит хотя бы в одной из этих групп.

5. Пусть $W_\nu \backslash T_\nu$ — множество орбит группы W_ν в T_ν. Тогда число классов сопряженности в G_n равно

$$\sum_{|\nu|=n} |W_\nu \backslash T_\nu|.$$

Мы можем отождествить T_ν с $M_{\nu_1} \times \ldots \times M_{\nu_r}$, а значит, элемент $t \in T_\nu$ — с последовательностью $(x_1, \ldots, x_r)$, где $x_i \in M_{\nu_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Для данного t определим функцию $\rho = \rho(t)$: $\Phi \to \mathcal{P}$ следующим образом: для каждого $f \in \Phi$ части разбиения $\rho(f)$ — это числа $\nu_i/d(f)$ для всех i, таких, что x_i является корнем f. Имеем $\|\rho(t)\| = n$, причем $\rho(t)$ зависит только от W_ν-орбиты элемента t в T_ν. Обратно, если дана функция μ: $\Phi \to \mathcal{P}$, такая, что $\|\mu\| = n$, то пусть ν — разбиение числа n, части которого есть ненулевые числа $d(f)|\mu(f)|$, где $f \in \Phi$. Тогда μ определяет единственную W_ν-орбиту в T_ν.

3. Индуцирование с параболических подгрупп

Пусть $n = n_1 + \ldots + n_r$, где n_i — положительные целые числа, и пусть $V^{(i)}$ — подпространство в $V = k^n$, порожденное первыми $n_1 + \ldots + n_i$ базисными векторами. Обозначим через F флаг

$$0 = V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \ldots \subset V^{(r)} = V.$$

Параболическая подгруппа P элементов $g \in G_n$, оставляющих F на месте, состоит из всех матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2r} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & g_{rr} \end{pmatrix}$$

где $g_{ii} \in G_{n_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Пусть u_i — центральная функция на G_{n_i} $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда функция u, определяемая формулой

$$u(g) = \prod_{i=1}^{r} u_i(g_{ii}),$$

является центральной функцией на P. Обозначим через $u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_r$ центральную функцию на G_n, получаемую из функции u индуцированием с P на G_n:

$$u_1 \circ \ldots u_r = \operatorname{ind}_P^{G_n}(u).$$

Если каждая u_i есть характер G_{n_i}, то $u_1 \circ \ldots \circ u_r$ является характером группы G_n.

Пусть разложение G_n на левые смежные классы относительно P имеет вид $G_n = \bigcup_i t_i P$. Для любого $x \in G_n$

$$(u_1 \circ \ldots \circ u_r)(x) = \sum_i u(t_i^{-1} x t_i)$$

с учетом того, что u обращается в 0 вне P. Далее, элемент $t^{-1}xt$ лежит в P тогда и только тогда, когда он оставляет на месте флаг F, т. е. тогда и только тогда, когда x оставляет на месте флаг tF, или, что эквивалентно, когда tF есть флаг *подмодулей* в $k[t]$-модуле V_x. Если мы положим $tV^{(i)} = W^{(i)}$ и

$$t^{-1}xt = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1r} \\ 0 & h_{22} & \ldots & h_{2r} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & h_{rr} \end{pmatrix},$$

то модуль $W^{(i)}/W^{(i-1)}$ будет изоморфен $V_{h_{ii}}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Отсюда получаем

(3.1) *Пусть u_i — центральная функция на G_{n_i} $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда значение центральной функции $u_1 \circ \ldots \circ u_r$ на классе c_μ в G_n дается формулой*

$$(u_1 \circ \ldots \circ u_r)(c_\mu) = \sum g^{\mu}_{\mu(1) \ldots \mu(r)} u_1(c_{\mu(1)}) \ldots u_r(c_{\mu(r)}),$$

где сумма берется по всем последовательностям $(\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)})$, таким, что $c_{\mu^{(i)}}$ есть класс сопряженности в G_{n_i} $(1 \leqslant i \leqslant r)$, а $g^{\mu}_{\mu^{(1)} \ldots \mu^{(r)}}$ — это число последовательностей

$$0 = W^{(0)} \subset W^{(1)} \subset \ldots \subset W^{(r)} = V_\mu$$

подмодулей в V_μ, таких, что $W^{(i)}/W^{(i-1)} \cong V_{\mu^{(i)}}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

В частности, пусть π_μ — характеристическая функция класса c_μ, принимающая значение 1 на элементах c_μ и 0 в остальных точках. Тогда в силу (3.1)

$$\pi_{\mu^{(1)}} \circ \ldots \circ \pi_{\mu^{(r)}} = \sum_\mu g^{\mu}_{\mu^{(1)} \ldots \mu^{(r)}} \pi_\mu. \tag{3.2}$$

Кроме того, из (2.7) вытекает, что

$$g^{\mu}_{\mu^{(1)} \ldots \mu^{(r)}} = \prod_{f \in \Phi} G^{\mu(f)}_{\mu^{(1)}(f) \ldots \mu^{(r)}(f)} \left(k[t]_{(f)}\right), \tag{3.3}$$

где символы G справа имеют тот же смысл, что и в гл. II.

Обозначим теперь через A_n пространство комплекснозначных центральных функций на G_n: это конечномерное комплексное векторное пространство, базисом которого служит семейство характеристических функций π_μ с $\|\mu\| = n$. Оно наделено эрмитовым скалярным произведением:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} u(g) \overline{v(g)}.$$

Пусть

$$A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$$

(с учетом того, что G_0 — группа из одного элемента, так что $A_0 = \mathbb{C}$). Произведение-индуцирование $u \circ v$, определенное выше, задает в A умножение, и мы распространяем скалярное произведение на всё A, требуя, чтобы компоненты A_n были взаимно ортогональны.

Из (3.2), (3.3) и § 2 гл. II следует, что

$$A = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}, \tag{3.4}$$

где H есть тензорное произведение (над $\mathbb{Z}$) алгебр Холла $H(k[t]_{(f)})$ по всем $f \in \Phi$. В частности, A — коммутативное и ассоциативное градуированное кольцо с характеристической функцией π_0 группы G_0 в качестве единичного элемента.

Далее, пусть $R_n \subset A_n$ есть $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный *характерами* группы G_n. Неприводимые характеры этой группы образуют ортонормированный базис в R_n, и $A_n = R_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. По-

ложим

$$R=\bigoplus_{n\geqslant 0} R_n;$$

поскольку произведение-индуцирование характеров является характером, R есть *подкольцо* в A, и $A=R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$.

4. Характеристическое отображение

Пусть $X_{i,f}$ $(i\geqslant 1, f\in\Phi)$ — независимые переменные над $\mathbb{C}$. Для любой симметрической функции u обозначим через $u(f)$ симметрическую функцию $u(X_f)=u(X_{1,f}, X_{2,f}, \ldots)$. Например, $e_n(f)$ есть n-я элементарная симметрическая функция от переменных $X_{i,f}$ $(i\geqslant 1, f$ фиксирован$)$, а $p_n(f)=\sum_i X_{i,f}^n$.

Пусть

$$B=\mathbb{C}\,[e_n(f)\colon\ n\geqslant 1,\quad f\in\Phi]$$

— алгебра многочленов над $\mathbb{C}$, порожденная элементами $e_n(f)$. Мы градуируем B, приписывая каждому $X_{i,f}$ степень $d(f)$, так что $e_n(f)$ однороден степени $n\cdot d(f)$.

Для каждого разбиения λ и каждого $f\in\Phi$ положим

$$\tilde{P}_\lambda(f)=q_f^{-n(\lambda)}P_\lambda\left(X_f;\ q_f^{-1}\right),$$

$$\tilde{Q}_\lambda(f)=q_f^{|\lambda|+n(\lambda)}Q_\lambda\left(X_f;\ q_f^{-1}\right)=a_\lambda(q_f)\,\tilde{P}_\lambda(f),$$

где P_λ и Q_λ — симметрические функции, определенные в гл. III, а $q_f=q^{d(f)}$. Для каждой функции $\mu\colon\ \Phi\to\mathscr{P}$, такой, что $\|\mu\|<\infty$, положим

$$\tilde{P}_\mu=\prod_{f\in\Phi}\tilde{P}_{\mu(f)}(f),\quad Q_\mu=\prod_{f\in\Phi}\tilde{Q}_{\mu(f)}(f)=a_\mu\tilde{P}_\mu$$

(почти все члены в этих произведениях равны 1, поскольку $\|\mu\|$ конечна). Ясно, что $\tilde{P}_\mu$ и $\tilde{Q}_\mu$ являются однородными элементами в B степени $\|\mu\|$. В силу (2.7) гл. III семейства $(\tilde{P}_\mu)$ и $(\tilde{Q}_\mu)$ являются $\mathbb{C}$-базисами в B. Мы определим эрмитово скалярное произведение на B, требуя, чтобы эти базисы были двойственными, т. е.

$$\langle\tilde{P}_\mu,\ \tilde{Q}_\nu\rangle=\delta_{\mu\nu}$$

для всех μ и ν.

Определим теперь $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathrm{ch}\colon A\to B$, полагая

$$\mathrm{ch}(\pi_\mu)=\tilde{P}_\mu,$$

где, как и выше, π_μ — характеристическая функция класса сопряженности c_μ. Мы называем это отображение ch *харак-*

теристическим отображением, а элемент $\mathrm{ch}(u)$ — *характеристикой* элемента $u \in A$.

(4.1) *Отображение* ch: $A \to B$ *является изометрическим изоморфизмом градуированных* $\mathbb{C}$-*алгебр.*

Доказательство. Поскольку элементы π_μ образуют базис в A, а $\tilde{P}_\mu$ — базис в B, отображение ch является линейным изоморфизмом, который, очевидно, совместим с градуировками. Из (3.6) гл. III и (3.2) следует, что ch является гомоморфизмом колец, а из (2.7) — что это изометрия. ∎

В силу (4.4) гл. III

$$\sum_\lambda q^{|\lambda|} P_\lambda(x;\, q^{-1})\, Q_\lambda(y;\, q^{-1}) = \prod_{i,\,j} (1 - x_i y_j)/(1 - q x_i y_j).$$

Если заменить x_i на $X_{i,\,f} \otimes 1$, y_j на $1 \otimes X_{j,\,f}$ и q на q_f, то это тождество примет вид

$$\sum_\lambda \tilde{P}_\lambda(f) \otimes \tilde{Q}_\lambda(f) = \prod_{i,\,j} (1 - X_{i,\,f} \otimes X_{j,\,f})/(1 - q_f X_{i,\,f} \otimes X_{j,\,f}).$$

Отсюда, беря в каждой части произведение по всем $f \in \Phi$, мы получаем

$$\text{(4.2)} \quad \sum_\mu \tilde{P}_\mu \otimes \tilde{Q}_\mu = \prod_{f \in \Phi} \prod_{i,\,j} (1 - X_{i,\,f} \otimes X_{j,\,f})/(1 - q_f X_{i,\,f} \otimes X_{j,\,f}).$$

Возьмем теперь логарифмы:

$$\log\Big(\sum_\mu \tilde{P}_\mu \otimes \tilde{Q}_\mu\Big) =$$

$$= \sum_{f \in \Phi} \sum_{i,\,j} (\log(1 - X_{i,\,f} \otimes X_{j,\,f}) - \log(1 - q_f X_{i,\,f} \otimes X_{j,\,f})) =$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{f \in \Phi} \sum_{i,\,j} (q_f^n - 1) X_{i,\,f}^n \otimes X_{j,\,f}^n,$$

так что

$$\text{(4.3)} \quad \log\Big(\sum_\mu \tilde{P}_\mu \otimes \tilde{Q}_\mu\Big) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{f \in \Phi} (q_f^n - 1)\, p_n(f) \otimes p_n(f).$$

На этой стадии удобно модифицировать наши обозначения для степенных сумм $p_n(f)$. Пусть $x \in M$, и пусть $f \in \Phi$ — минимальный многочлен x над k (или, что эквивалентно, F-орбита элемента x (§ 1)). Положим

$$\tilde{p}_n(x) = \begin{cases} p_{n/d}(f), & \text{если } n \text{ кратно } d = d(f), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

так что $\tilde{p}_n(x) \in B_n$, причем $\tilde{p}_n(x) = 0$ при $x \notin M_n$. В этих обозначениях (4.3) принимает вид

$$\text{(4.4)}\qquad \log\Big(\sum_{\mu} \tilde{P}_\mu \otimes \tilde{Q}_\mu\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{q^n - 1}{n} \sum_{x \in M_n} \tilde{p}_n(x) \otimes \tilde{p}_n(x).$$

Положим теперь для каждого $\xi \in L$

$$\text{(4.5)}\qquad \tilde{p}_n(\xi) = \begin{cases} (-1)^{n-1} \sum\limits_{x \in M_n} \langle \xi, x\rangle_n \tilde{p}_n(x), & \text{если} \quad \xi \in L_n, \\ 0, \quad \text{если} \quad \xi \notin L_n. \end{cases}$$

Поскольку $\tilde{p}_n(x) = \tilde{p}_n(y)$, если x и y лежат на одной F-орбите в M, отсюда следует, что $\tilde{p}_n(\xi) = \tilde{p}_n(\eta)$, если ξ и η лежат на одной F-орбите в L.

Обозначим через Θ множество F-орбит в L. Для каждой орбиты $\varphi \in \Theta$ обозначим через $d(\varphi)$ число ее элементов и для каждого $r \geqslant 1$ положим

$$p_r(\varphi) = \tilde{p}_{rd}(\xi),$$

где ξ — любой элемент из φ, а $d = d(\varphi)$. Будем рассматривать $p_r(\varphi)$ как степенные суммы от множества переменных $Y_{i,\varphi}$, каждое из которых имеет степень $d(\varphi)$. С помощью формул гл. I мы можем теперь определить другие симметрические функции от переменных $Y_{i,\varphi}$, в частности S-функции $s_\lambda(\varphi)$ (по формуле (7.10) гл. I).

Для каждой функции $\lambda\colon \Theta \to \mathcal{P}$, такой, что

$$\|\lambda\| = \sum_{\varphi \in \Theta} d(\varphi)\,|\lambda(\varphi)| < \infty,$$

положим

$$S_\lambda = \prod_{\varphi \in \Theta} s_{\lambda(\varphi)}(\varphi)$$

— это однородный элемент алгебры B степени $\|\lambda\|$.

Обозначим через S Z-подмодуль алгебры B, порожденный элементами S_λ. Поскольку S-функции образуют Z-базис в кольце симметрических функций, ясно, что S замкнут относительно умножения и что элементы S_λ образуют в нем Z-базис. Значит, S — градуированное подкольцо в B. Из уравнений (4.5) можно выразить $\tilde{p}_n(x)$ через $\tilde{p}_n(\xi)$, а именно

$$\tilde{p}_n(x) = (-1)^{n-1} (q^n - 1)^{-1} \sum_{\xi \in L_n} \overline{\langle \xi, x\rangle_n}\, \tilde{p}_n(\xi)$$

для $x \in M_n$ в силу ортогональности характеров конечной группы M_n. Отсюда получаем, что $S \otimes_Z \mathbb{C} = B$.

Смысл введения этого аппарата состоит в том, что элементы S_λ с $\|\lambda\| = n$ окажутся характеристиками неприводимых характеров группы $G_n = GL_n(k)$.

В завершение этого раздела мы покажем, что элементы S_λ образуют ортонормированный базис в S.

Мы можем записать любой элемент u алгебры B в виде $u=\sum u_\mu \tilde{P}_\mu$ с коэффициентами $u_\mu \in \mathbb{C}$, и мы определим элемент $\bar{u}$ как $\sum \bar{u}_\mu \tilde{P}_\mu$. В силу (4.3) гл. I

$$\log\left(\sum_\lambda s_\lambda(x)\, s_\lambda(y)\right)=\sum_{i,j}\log(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\,p_n(x)\,p_n(y)$$

для двух множеств переменных x_i и y_j, и, следовательно,

$$\log\left(\sum_\lambda S_\lambda\otimes \bar{S}_\lambda\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{\varphi\in\Theta}p_n(\varphi)\otimes\overline{p_n(\varphi)}=$$
$$=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{\xi\in L_n}\tilde{p}_n(\xi)\otimes\overline{\tilde{p}_n(\xi)}.$$

Но из (4.5) мы получаем

$$\sum_{\xi\in L_n}\tilde{p}_n(\xi)\otimes\overline{\tilde{p}_n(\xi)}=\sum_{\xi\in L_n}\sum_{x,\,y\in M_n}\langle\xi,x\rangle_n\overline{\langle\xi,y\rangle_n}\,\tilde{p}_n(x)\otimes\tilde{p}_n(y)=$$
$$=(q^n-1)\sum_{x\in M_n}\tilde{p}_n(x)\otimes\tilde{p}_n(x)$$

в силу ортогональности характеров конечной группы M_n. Теперь из (4.4) вытекает, что

$$(4.6)\qquad \sum_\lambda S_\lambda\otimes\bar{S}_\lambda=\sum_\mu\tilde{P}_\mu\otimes\tilde{Q}_\mu.$$

Если $S_\lambda=\sum_\mu u_{\lambda\mu}\tilde{P}_\mu=\sum_\mu v_{\lambda\mu}\tilde{Q}_\mu$, то из (4.6) следует, что $\sum_\lambda u_{\lambda\mu}\bar{v}_{\lambda\nu}=\delta_{\mu\nu}$, а значит,

$$\sum_\mu u_{\varkappa\mu}\bar{v}_{\lambda\mu}=\delta_{\varkappa\lambda}.$$

Другими словами, $\langle S_\varkappa, S_\lambda\rangle=\delta_{\varkappa\lambda}$, так что

(4.7) *Элементы S_λ образуют ортонормированный базис в S.* ∎

Пример

Пусть u — произвольная центральная функция на G_n. Тогда ее значение на элементах класса c_μ равно $\langle \mathrm{ch}(u), \tilde{Q}_\mu\rangle$. В самом деле, $u(c_\mu)=a_\mu\langle u,\pi_\mu\rangle=\langle\mathrm{ch}(u),\mathrm{ch}(a_\mu\pi_\mu)\rangle=\langle\mathrm{ch}(u),\tilde{Q}_\mu\rangle$ в силу (2.7) и (4.1).

5. Конструкция характеров

Фиксируем характер θ мультипликативной группы M поля $\bar{k}$.

(5.1) *Пусть G — конечная группа, а $\rho\colon G\to GL_n(k)$ — модулярное представление группы G. Для каждого $x\in G$ пусть*

$u_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — собственные значения преобразования $\rho(x)$. Пусть $f \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$ — симметрический многочлен. Тогда функция

$$\chi\colon\ x \longmapsto f(\theta(u_1(x)), \ldots, \theta(u_n(x)))$$

есть характер группы G, т. е. целочисленная линейная комбинация характеров комплексных представлений этой группы.

Доказательство отложим до приложения. Мы применим (5.1) в случае, когда $G = G_n$, ρ — тождественное отображение, а f есть r-я элементарная симметрическая функция e_r $(0 \leqslant r \leqslant n)$. Предположим также, что характер $\theta\colon M \to \mathbb{C}^*$ инъективен, т. е. является изоморфизмом M на группу корней из единицы в $\mathbb{C}$ порядка, взаимно простого с $p = \operatorname{char} k$. Тогда (5.1) утверждает, что функция

$$\chi_r\colon\ g \longmapsto e_r(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_n)),$$

где $x_i \in \bar{k}$ — собственные значения элемента $g \in G_n$, является (комплексным) характером группы G_n.

Далее, характеристический многочлен g есть (пример 2 § 2)

$$\prod_{f \in \Phi} f^{|\mu(f)|} = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i),$$

где $\mu\colon \Phi \to \mathscr{P}$ — функция со значениями в разбиениях, определяемая элементом g.

Для каждого $f \in \Phi$, скажем $f = \prod (t - y_i)$, мы будем писать

$$\tilde{f} = \prod (1 + y_i t) \quad \text{и} \quad \theta(\tilde{f}) = \prod (1 + \theta(y_i) t).$$

Тогда, поскольку

$$\sum_{r=0}^{n} \chi_r(g) t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + \theta(x_i) t),$$

то

$$\sum_{r=0}^{n} \chi_r(g) t^r = \prod_{f \in \Phi} \theta(\tilde{f})^{|\mu(f)|}. \tag{5.2}$$

Нам нужно вычислить характеристику χ_r. Так как

$$\chi_r = \sum_{\mu} \chi_r(c_\mu) \pi_\mu,$$

где $\chi_r(c_\mu)$ — значение характера χ_r на элементах класса c_μ, то из (5.2) вытекает, что

$$\sum_{r=0}^{n} \operatorname{ch}(\chi_r) t^r = \sum_{\mu} \prod_{f \in \Phi} \theta(\tilde{f})^{|\mu(f)|} \tilde{P}_\mu, \tag{5.3}$$

где сумма берется по всем $\mu\colon \Phi \to \mathscr{P}$, таким, что $\|\mu\| = n$.

Далее, в силу примера 1 § 3 гл. III

$$\sum_{|\lambda|=m} t^{n(\lambda)} P_\lambda(x;\, t) = h_m(x),$$

и, следовательно,

(5.4) $$\sum_{|\lambda|=m} \tilde{P}_\lambda(f) = h_m(f)$$

для всех $f \in \Phi$. Отсюда вытекает, что сумма в правой части (5.3) равна

$$\sum_\alpha \prod_{f\in\Phi} \theta(\tilde{f})^{\alpha(f)} h_{\alpha(f)}(f),$$

где суммирование ведется по всем $\alpha\colon \Phi \to \mathbb{N}$, таким, что $\sum_f d(f)\,\alpha(f) = n$; значит, она равна коэффициенту при u^n в

$$H(t,\, u) = \prod_{f\in\Phi} \prod_{i\geqslant 1} (1 - \theta(\tilde{f})\, X_{i,\,f} u^{d(f)})^{-1}.$$

Таким образом,

(5.5) *Характеристика* $\operatorname{ch}(\chi_r)$ *равна коэффициенту при* $t^r u^n$ *в* $H(t, u)$.

Чтобы привести $H(t, u)$ к удобному виду, вычислим его логарифм:

$$\log H(t,\, u) = \sum_{f\in\Phi} \sum_{i\geqslant 1} \log(1 - \theta(\tilde{f})\, X_{i,\,f} u^{d(f)})^{-1} = \\ = \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m} \sum_{f\in\Phi} \theta(\tilde{f})^m p_m(f)\, u^{md(f)}.$$

Если теперь x — произвольный корень многочлена f, то

$$\theta(\tilde{f}) = \prod_{i=0}^{d-1} (1 + t\theta(F^i x)),$$

где $d = d(f)$, и, следовательно (так как $F^d x = x$),

$$\theta(\tilde{f})^m = \prod_{i=0}^{md-1} (1 + t\theta(F^i x)).$$

Таким образом,

$$\log H(t,\, u) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{u^m}{m} \sum_{x\in M_m} \tilde{p}_m(x) \prod_{i=0}^{m-1} (1 + t\theta(F^i x)).$$

Далее, элементы F^i $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$, действующие на k_m, — это элементы группы Галуа $\mathfrak{g}_m = \operatorname{Gal}(k_m/k)$. Поэтому

внутренняя сумма выше может быть переписана как

$$\sum_{x\in M_m} \tilde{p}_m(x) \prod_{\gamma\in\mathfrak{g}_m} (1+t\theta(\gamma x)) = \sum_{I\subset\mathfrak{g}_m} t^{|I|} \sum_{x\in M_m} \tilde{p}_m(x) \prod_{\gamma\in I} \theta(\gamma x) = $$

$$= (-1)^{m-1} \sum_{I\subset\mathfrak{g}_m} t^{|I|} \tilde{p}_m(\theta_{m,I})$$

в силу (4.5), где $\theta_{m,I}$ есть характер $x\longmapsto\prod_{\gamma\in I}\theta(\gamma x)$ группы M_m, отождествленный со своим образом в L_m. Значит,

$$\log H(t,u) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}u^m}{m} \sum_{I\subset\mathfrak{g}_m} t^{|I|}\tilde{p}_m(\theta_{m,I}). \tag{5.6}$$

Группа $\mathfrak{g}_m$ действует на множестве всех своих подмножеств I умножением. Если стабилизатор подмножества I тривиален, то мы будем говорить, что I *примитивно*, а пара (m,I) есть *индекс*. В этом случае все сдвиги γI $(\gamma\in\mathfrak{g}_m)$ различны, поэтому F-орбита характера $\theta_{m,I}$ состоит из m элементов. Если I не примитивно, то стабилизатор I в $\mathfrak{g}_m$ есть нетривиальная подгруппа $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}_m$, порожденная, скажем, элементом F^s, где s делит m. Поскольку I выдерживает умножение на элементы из $\mathfrak{h}$, оно есть объединение некоторых смежных классов по $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}_m$, скажем $I=\mathfrak{h}J$, где $J=I/\mathfrak{h}$ может рассматриваться как подмножество в $\mathfrak{g}_m/\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_s=\mathrm{Gal}(k_s/k)$. Более того, по построению J — примитивное подмножество в $\mathfrak{g}_s$, т. е. пара (s,J) есть индекс, причем ясно, что $\theta_{m,I}=\theta_{s,J}\circ N_{m,s}$, где $N_{m,s}: M_m\to M_s$ — норменное отображение (§ 1), так что $\theta_{m,I}$ и $\theta_{s,J}$ определяют один и тот же элемент в L. Так как (s,J) есть индекс, то F-орбита $\varphi_{s,J}$ характера $\theta_{s,J}$ в L состоит из s элементов, и, следовательно, $\tilde{p}_m(\theta_{m,I})=p_{m/s}(\varphi_{s,J})$.

Таким образом, формула (5.6) превращается в

$$\log H(t,u) = \sum_{(s,J)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} p_n(\varphi_{s,J}) \left(t^{|J|}u^s\right)^n,$$

где сумма берется по всем индексам (s,J), причем два индекса (s,J) и (s,J') считаются одинаковыми, если J' есть сдвиг J, т. е. если $\varphi_{s,J}=\varphi_{s,J'}$. Но в силу (2.10′) гл. I внутренняя сумма выше равна

$$\log \sum_{m\geqslant 0} e_m(\varphi_{s,J}) \left(t^{|J|}u^s\right)^m,$$

поэтому мы доказали

(5.7) *Для всех целых r, n, таких, что $0\leqslant r\leqslant n$, коэффициент при $t^r u^n$ в*

$$H(t,u) = \prod_{(s,J)} \left(\sum_{m\geqslant 0} e_m(\varphi_{s,J}) \left(t^{|J|}u^s\right)^m\right)$$

есть характеристика некоторого характера группы G_n. ∎

Мы воспользуемся (5.7) для доказательства

(5.8) *Пусть φ есть F-орбита в L, $d=d(\varphi)$ и $n\geqslant 0$. Тогда $e_n(\varphi)$ является характеристикой некоторого характера группы G_{nd}.*

Доказательство. Проведем индукцию по парам (n, d), упорядоченным лексикографически: $(n, d)<(n', d')$, если либо $n<n'$, либо $n=n'$ и $d<d'$. Результат верен при $n=d=1$, поскольку в этом случае $\varphi=\{\xi\}$, где $\xi\in L_1$ есть характер группы $G_1=M_1$, и

$$e_1(\xi)=p_1(\xi)=\sum_{x\in G_1}\xi(x)\,p_1(x)=\operatorname{ch}(\xi)$$

(так как $\operatorname{ch}(\pi_x)=p_1(x)$ при $x\in G_1$, где π_x — характеристическая функция подмножества $\{x\}$).

Обозначим через $\chi_{n,d}$ коэффициент при $t^n u^{nd}$ в $H(t, u)$. В силу (5.7) $\chi_{n,d}$ есть характеристика некоторого характера группы G_{nd}, и

$$\chi_{n,d}=\sum_{v}\prod_{(s,J)}e_{v(s,J)}(\varphi_{s,J}),$$

где суммирование идет по всем $\mathbb{N}$-значным функциям v на множестве индексов, таким, что

$$\sum_{(s,J)}|J|\,v(s,J)=n,\qquad \sum_{(s,J)}s v(s,J)=nd.$$

Для всех встречающихся в этом разложении индексов (s, J) имеем $v(s,J)\leqslant n$ и $s\leqslant d$ при $v(s,J)=n$, так что $(v(s,J), s)\leqslant(n,d)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $v(s,J)=n$ (так что $|J|=1$) и $s=d$. Значит, $\chi_{n,d}$ имеет «старший член» $e_n(\varphi_{d,\{1\}})$, где 1 — тождественный элемент в $\mathfrak{g}_d$, а $\varphi_{d,\{1\}}$ есть F-орбита характера $\theta|M_d$. Можно теперь выбрать θ так, что $\theta|M_d=\varphi$, и тогда мы получим

$$\chi_{n,d}=e_n(\varphi)+\ldots,$$

где невыписанные члены есть произведения двух или более элементов e, являющихся в силу предположения индукции характеристиками некоторых характеров групп $G_{n'd'}$, где $(n', d')<(n, d)$. Значит, $e_n(\varphi)$ есть характеристика некоторого характера группы G_{nd}. ∎

6. Неприводимые характеры

Мы можем теперь очень быстро получить все неприводимые характеры групп $G_n=GL_n(k)$. Поскольку S-функции s_λ — это многочлены от элементов e с целыми коэффициен-

тами, из (5.8) вытекает, что все $s_\lambda(\varphi)$, а значит, и все S_λ являются характеристиками *характеров* χ^λ групп G_n (где $n=\|\lambda\|$).

В силу (4.1) и (4.7) $\langle\chi^\varkappa, \chi^\lambda\rangle=\delta_{\varkappa\lambda}$, следовательно, все χ^λ, такие, что $\|\lambda\|=n$, являются с точностью до знака неприводимыми характерами группы G_n. Более того, ранг свободного $\mathbb{Z}$-модуля R_n, порожденного неприводимыми характерами G_n, равен числу классов сопряженности в G_n, т. е. числу функций μ: $\Phi\to\mathscr{P}$, таких, что $\|\mu\|=n$. Так как группы L и M изоморфны, это есть также число функций λ: $\Theta\to\mathscr{P}$, таких, что $\|\lambda\|=n$, и, следовательно, характеры χ^λ образуют ортонормированный *базис* в R_n. Таким образом, характеры $\pm\chi^\lambda$ исчерпывают все неприводимые характеры G_n.

Осталось решить вопрос знака; мы сделаем это, вычислив степень $d_\lambda=\chi^\lambda(1_n)$ характера χ^λ.

Обозначим через χ^λ_μ значение характера χ^λ на элементах класса c_μ. Тогда

$$\chi^\lambda=\sum_\mu \chi^\lambda_\mu \pi_\mu,$$

где сумма берется по всем μ: $\Phi\to\mathscr{P}$, таким, что $\|\mu\|=\|\lambda\|$, и, следовательно,

$$S_\lambda=\sum_\mu \chi^\lambda_\mu \widetilde{P}_\mu, \tag{6.1}$$

а это показывает, что $\chi^\lambda_\mu=\langle S_\lambda, \widetilde{Q}_\mu\rangle$ и, значит, в силу (4.7), что

$$\widetilde{Q}_\mu=\sum_\lambda \chi^\lambda_\mu \overline{S}_\lambda. \tag{6.2}$$

Предположим теперь, что c_μ есть класс единичного элемента $1_n\in G_n$, и обозначим через f_1 многочлен $t-1$. Тогда $\mu(f_1)=(1^n)$ и $\mu(f)=0$ при $f\neq f_1$. Значит,

$$\widetilde{Q}_\mu=\widetilde{Q}_{(1^n)}(f_1)=q^{n(n+1)/2}\varphi_n(q^{-1})\,P_{(1^n)}(X_{f_1};\,q^{-1})=\psi_n(q)\,e_n(f_1)$$

в силу (2.8) гл. III, где

$$\psi_n(q)=\sum_{i=1}^{n}(q^i-1).$$

Поэтому из (6.2) мы получаем, что

$$\psi_n(q)\,e_n(f_1)=\sum_{\|\lambda\|=n} d_\lambda \overline{S}_\lambda. \tag{6.3}$$

Пусть теперь δ: $B\to\mathbb{C}$ — гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр, определяемый формулой

$$\delta(\tilde{p}_n(x))=\begin{cases}0, & \text{если } x\neq 1,\\ (-1)^{n-1}/(q^n-1), & \text{если } x=1.\end{cases} \tag{6.4}$$

Из (4.6) и (4.4) вытекает, что

$$\log\left(\sum_\lambda \delta(S_\lambda)\bar{S}_\lambda\right) = \log\left(\sum_\mu \delta(\tilde{P}_\mu)\tilde{Q}_\mu\right) = \\ = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\tilde{p}_n(1) = \log\prod_i (1+X_{i,f_1}),$$

и, следовательно,

$$\sum_{n\geqslant 0} e_n(f_1) = \sum_\lambda \delta(S_\lambda)\bar{S}_\lambda,$$

так что

$$e_n(f_1) = \sum_{\|\lambda\|=n} \delta(S_\lambda)\bar{S}_\lambda.$$

Сравнивая эту формулу с (6.3), мы видим, что

(6.5) $$d_\lambda = \psi_n(q)\,\delta(S_\lambda).$$

Для нахождения числа $\delta(S_\lambda)$ заметим, что в силу (6.4) и определения (4.5) элементов $\tilde{p}_n(\xi)$ мы имеем $\delta(\tilde{p}_n(\xi)) = (q^n-1)^{-1}$ при $\xi\in L_n$, значит,

$$\delta(p_n(\varphi)) = (q_\varphi^n - 1)^{-1} = \sum_{i\geqslant 1} q_\varphi^{-in}$$

для всех $\varphi\in\Theta$, где $q_\varphi = q^{d(\varphi)}$. Другими словами, $\delta(p_n(\varphi))$ есть n-я степенная сумма от чисел q_φ^{-i} $(i\geqslant 1)$, откуда в силу примера 2 § 3 гл. I мы получаем

$$\delta(s_\lambda(\varphi)) = s_\lambda(q_\varphi^{-1}, q_\varphi^{-2}, \ldots) = q_\varphi^{-|\lambda|-n(\lambda)}\prod_{x\in\lambda}\left(1-q_\varphi^{-h(x)}\right)^{-1},$$

где $h(x)$ — длина крюка квадрата $x\in\lambda$. Поскольку

$$\sum_{x\in\lambda} h(x) = |\lambda| + n(\lambda) + n(\lambda')$$

(пример 2 § 1 гл. I), то

(6.6) $$\delta(s_\lambda(\varphi)) = q_\varphi^{n(\lambda')}\tilde{H}_\lambda(q_\varphi)^{-1},$$

где

$$\tilde{H}_\lambda(q_\varphi) = \prod_{x\in\lambda}\left(q_\varphi^{h(x)}-1\right).$$

Из (6.5) и (6.6) мы получаем

(6.7) $$d_\lambda = \psi_n(q)\prod_{\varphi\in\Theta} q_\varphi^{n(\lambda(\varphi)')}\tilde{H}_{\lambda(\varphi)}(q_\varphi)^{-1},$$

что, очевидно, положительно. Значит, неприводимым характером G_n является χ^λ, а не $-\chi^\lambda$. Резюмируем:

(6.8) *Неприводимые характеры группы* $G_n = GL_n(k)$ — *это функции* χ^λ, *определяемые формулой* $\mathrm{ch}(\chi^\lambda) = S_\lambda$, *где* $\lambda\colon \Theta\to$

$\to \mathcal{P}$ и $\|\lambda\| = n$. Степень d_λ характера χ^λ дается формулой (6.7), а таблица характеров группы G_n есть матрица перехода между базисами (S_λ) и $(\tilde{P}_\mu)$.

Примеры

1. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$ — разбиение числа n, и пусть θ_ν — характер «максимального тора» T_ν(пример 4 § 2). Если отождествить T_ν с $M_{\nu_1} \times \ldots \times M_{\nu_r}$, то θ_ν можно отождествить с $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, где $\xi_i \in L_{\nu_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда $\prod_{i=1}^{r} \tilde{p}_{\nu_i}(\xi_i)$ есть характеристика (вообще говоря, приводимого) характера $B(\theta_\nu)$ группы G_n, который зависит только от F-орбит φ_i элементов ξ_i, т. е. $B(\theta_\nu)$ зависит только от W_ν-орбиты элемента θ_ν в группе характеров $\hat{T}_\nu$. Различные характеры $B(\theta)$, где $\theta \in \bigcup_\nu (W_\nu \setminus \hat{T}_\nu)$, попарно ортогональны в A_n; а так как в силу примера 5 § 2 их ровно столько же, столько классов сопряженности в G_n, то они образуют ортогональный *базис* в пространстве A_n центральных функций на G_n. Грин [14] называет характеры $B(\theta)$ *основными* характерами. $B(\theta_\nu)$ неприводим тогда и только тогда, когда $d(\varphi_i) = \nu_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, т. е. тогда и только тогда, когда θ_ν — *регулярный* характер тора T_ν (т. е. его стабилизатор в W_ν тривиален).

Значение характера $B(\theta_\nu)$ на унипотентном элементе типа λ равно (пример 1 § 4) $\left\langle \prod \tilde{p}_{\nu_i}(\xi_i), \tilde{Q}_\lambda(f_1) \right\rangle$, где $f_1 = t - 1$. В силу (4.5) это равно

$$(-1)^{\sum(\nu_i - 1)} \langle p_\nu(f_1), \tilde{Q}_\lambda(f_1) \rangle = (-1)^{n - l(\nu)} Q_\nu^\lambda(q),$$

где $Q_\nu^\lambda(q)$ — многочлен Грина (§ 7 гл. III).

Кроме того, характер $B(\theta_\nu)$ обращается в нуль на регулярных полупростых классах, не пересекающихся с тором T_ν.

2. Как и в примере 2 § 2, иногда бывает более удобно рассматривать λ: $\Theta \to \mathcal{P}$ как функцию на L, т. е. мы определяем $\lambda(\xi)$ при $\xi \in L$ как разбиение $\lambda(\varphi)$, где φ есть F-орбита элемента ξ. В этих обозначениях положим

$$\Delta(\lambda) = \prod_{\xi \in L} \xi^{|\lambda(\xi)|} \in L_1.$$

Пусть $a \in k^* = M_1$. Тогда

$$(*) \qquad \chi^\lambda(a \cdot 1_n) = \langle \Delta(\lambda), a \rangle_1 \chi^\lambda(1_n).$$

Это может быть показано методом, использованным в тексте для вычисления $\chi^\lambda(1_n)$, с помощью гомоморфизма δ_a: $B \to \mathbb{C}$, определяемого посредством $\delta_a(\tilde{p}_n(x)) = (-1)^{n-1}/(q^n - 1)$ при $x = a$ и $\delta_a(\tilde{p}_n(x)) = 0$ при $x \neq a$. Тогда $\chi^\lambda(a \cdot 1_n) = \psi_n(q)\, \delta_a(S_\lambda)$, причем действие δ_a состоит в замене φ-переменных $Y_{i,\varphi}$ на $\langle \xi, a \rangle_d \cdot q_\varphi^{-i}$, где $\xi \in \varphi$ и $d = d(\varphi)$. Отсюда легко вытекает формула $(*)$.

3. Пусть U_n — множество унипотентных элементов в G_n. Тогда для любого неприводимого характера χ^λ группы G_n

$$\sum_{u \in U_n} \chi^\lambda(u) = (-1)^{a(\lambda)} q^{N(\lambda)} \chi^\lambda(1_n),$$

где $a(\lambda) = n - \sum_\varphi |\lambda(\varphi)|$ и $N(\lambda) = n(n-1)/2 + \sum_\varphi d(\varphi)\,(n(\lambda(\varphi)) - n(\lambda(\varphi)'))$.

Пусть $e_\lambda = \sum_{u \in U_n} \chi^\lambda(u)$. Тогда

$$e_\lambda = |G_n| \sum_{|\rho|=n} a_\rho(q)^{-1} \langle S_\lambda, \widetilde{Q}_\rho(f_1)\rangle,$$

где $f_1 = t - 1$, значит, в силу (5.4)

$$e_\lambda = |G_n| \langle S_\lambda, h_n(f_1)\rangle,$$

так что

$$q^{n(n-1)/2}\psi_n(q)\, h_n(f_1) = \sum_{\|\lambda\|=n} e_\lambda \overline{S}_\lambda.$$

Пусть ε: $B \to \mathbf{C}$ — гомоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр, определяемый формулами $\varepsilon(\tilde{p}_n(1)) = (q^n - 1)^{-1}$, $\varepsilon(\tilde{p}_n(x)) = 0$ при $x \neq 1$. Тогда так же, как в основном тексте, мы видим, что

$$h_n(f_1) = \sum_{\|\lambda\|=n} \varepsilon(S_\lambda)\, \overline{S}_\lambda,$$

так что $e_\lambda = q^{n(n-1)/2}\psi_n(q)\,\varepsilon(S_\lambda)$, причем $\varepsilon(S_\lambda)$ можно вычислить таким же образом, как $\delta(S_\lambda)$ в тексте.

4. Пусть ψ — нетривиальный аддитивный характер поля k, а χ^λ — неприводимый характер G_n. Мы вычислим

$$w_\lambda = \chi^\lambda(1_n)^{-1} \sum_{g \in G_n} \psi(\operatorname{trace} g)\, \chi^\lambda(g)$$

(см. [24], [34]). Для этого введем следующие обозначения: если $x \in k_n$, то положим $\psi_n(x) = \psi\left(\operatorname{trace}_{k_n/k}(x)\right)$, а для $\xi \in L_n$ положим

$$\tau_n(\xi) = (-1)^{n-1} \sum_{x \in M_n} \langle \xi, x\rangle_n\, \psi_n(x).$$

При $f \in \Phi$ обозначим через $\psi(f)$ число $\psi_d(x)$, где $d = d(f)$, а x — корень многочлена f. При $\varphi \in \Theta$ положим $\tau(\varphi) = \tau_d(\xi)$, где $d = d(\varphi)$ и $\xi \in \varphi$.

Если $g \in c_\mu$, то $\operatorname{trace}(g) = \sum_{x \in M} |\mu(x)|\, x$ (пример 2 § 2), откуда

$$\psi(\operatorname{trace} g) = \prod_{f \in \Phi} \psi(f)^{|\mu(f)|}$$

(обозначим это число через ψ_μ). Имеем

$$\chi^\lambda(1_n)\, w_\lambda = |G_n| \sum_{\|\mu\|=n} a_\mu^{-1} \chi^\lambda_\mu \psi_\mu,$$

и, так как $\chi^\lambda_\mu = \langle S_\lambda, \widetilde{Q}_\mu\rangle$, отсюда следует, что

$$\sum_\mu \psi_\mu \widetilde{P}_\mu = |G_n|^{-1} \sum_\lambda \chi^\lambda(1_n)\, w_\lambda \overline{S}_\lambda. \tag{1}$$

Определим теперь гомоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр ε: $B \to \mathbf{C}$, полагая $\varepsilon(X_{i,f}) = \psi(f)\, q_f^{-i}$ для всех $f \in \Phi$ и $i \geqslant 1$. Тогда из примера 1 § 2 гл. III следует, что $\varepsilon(\widetilde{Q}_\mu) = \psi_\mu$, а значит, из (1) и (4.6) мы получаем

$$\varepsilon(S_\lambda) = |G_n|^{-1} \chi^\lambda(1_n)\, w_\lambda. \tag{2}$$

Для всех $x \in M_n$ мы имеем $\varepsilon(\bar{\rho}_n(x)) = \psi_n(x)/(q^n - 1)$, а следовательно,

$$\varepsilon(\bar{\rho}_n(\xi)) = \frac{(-1)^{n-1}}{q^n - 1} \sum_{x \in M_n} \langle \xi, x \rangle_n \psi_n(x) = \tau_n(\xi)/(q^n - 1)$$

при $\varepsilon \in L_n$. Далее, тождество Хассе — Давенпорта (см., например, [54]) утверждает, что $\tau_{nd}(\xi) = \tau_n(\xi)^d$ при всех $d \geqslant 1$; значит, $\varepsilon(p_n(\varphi)) = \tau(\varphi)^n/(q_\varphi^n - 1)$, где $q_\varphi = q^{d(\varphi)}$, так что действие гомоморфизма ε состоит в замене φ-переменных $Y_{i,\varphi}$ на $\tau(\varphi) q_\varphi^{-i}$. Следовательно,

$$\varepsilon(S_\lambda) = \prod_{\varphi \in \Theta} \tau(\varphi)^{|\lambda(\varphi)|} \cdot \delta(S_\lambda), \tag{3}$$

где δ — гомоморфизм, определенный в (6.4). Из (2), (3) и (6.5) мы получаем

$$\varpi_\lambda = q^{n(n-1)/2} \prod_{\varphi \in \Theta} \tau(\varphi)^{|\lambda(\varphi)|}.$$

5. (a)* В этом примере мы вычислим сумму размерностей всех неприводимых представлений группы G_n. Поскольку $d_\lambda = \psi_n(q)\,\delta(S_\lambda)$, нам нужно вычислить $\sum\limits_{\|\lambda\|=n} \delta(S_\lambda)$ Для этого мы вычислим сумму ряда $S = \sum\limits_{\lambda} \delta(S_\lambda) t^{\|\lambda\|}$, где t — независимое переменное, а затем выделим коэффициент при t^n.

Имеем

$$S = \prod_\varphi \sum_\lambda \delta(s_\lambda(\varphi))\, t^{|\lambda|\, d(\varphi)},$$

и, поскольку гомоморфизм δ заменяет переменные $Y_{i,\varphi}$ на q_φ^{-i} $(i \geqslant 1)$, то из примера 4 § 5 гл. I вытекает, что

$$\sum_\lambda \delta(s_\lambda(\varphi))\, t^{|\lambda|\, d(\varphi)} = \prod_i \left(1 - (tq^{-i})^{d(\varphi)}\right)^{-1} \prod_{i<j} \left(1 - (t^2 q^{-i-j})^{d(\varphi)}\right)^{-1},$$

а значит, что

$$\log S = \sum_\varphi \left(\sum_i \log\left(1 - (tq^{-i})^{d(\varphi)}\right)^{-1} + \sum_{i<j} \log\left(1 - (t^2 q^{-i-j})^{d(\varphi)}\right)^{-1} \right). \tag{1}$$

При $m \geqslant 1$ обозначим через d_m число орбит φ мощности $d(\varphi) = m$; рассматривая действие отображения F на группе L_m, мы получим, что

$$q^m - 1 = \sum_{r \mid m} r d_r. \tag{2}$$

Мы можем теперь переписать (1) как

$$\log S = \sum_{m \geqslant 1} d_m \left(\sum_{i \geqslant 1} \sum_{r \geqslant 1} \frac{(tq^{-i})^{mr}}{r} + \sum_{i<j} \sum_{r \geqslant 1} \frac{(t^2 q^{-i-j})^{mr}}{r} \right) =$$

$$= \sum_{m \geqslant 1} \sum_{r \geqslant 1} \frac{d_m}{r} \frac{t^{mr}}{q^{mr} - 1} \left(1 + \sum_{i \geqslant 1} t^{mr} q^{-2imr} \right).$$

что в силу (2) равно

$$\sum_{N\geqslant 1}\left(\frac{t^N}{N}+\sum_{i\geqslant 1}\frac{t^{2N}q^{-2iN}}{N}\right)=\log(1-t)^{-1}+\sum_{i\geqslant 1}\log(1-t^2q^{-2i})^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$S=\frac{1}{1-t}\prod_{i\geqslant 1}\frac{1}{1-t^2q^{2i}}=(1+t)\prod_{i\geqslant 0}\frac{1}{1-t^2q^{2i}}=$$
$$=(1+t)\sum_{m\geqslant 0}\frac{t^{2m}}{(1-q^{-2})\ldots(1-q^{-2m})}$$

(пример 4 § 2 гл. I). Выделяя коэффициент при t^n и умножая его на $\psi_n(q)$, мы получим

$$\sum_{\|\lambda\|=n}d_\lambda=(q-1)\,q^2\,(q^3-1)\,q^4\,(q^5-1)\,\ldots$$

(всего n сомножителей). Это число равно также числу симметрических матриц в G_n, или, что эквивалентно, числу невырожденных симметрических билинейных форм на k^n.

(b)° Аналогичное рассуждение показывает, что

$$\sum d_\mu=(q-1)\,q^2\,(q^3-1)\,q^4\,\ldots\,(q^{2n-1}-1),$$

где сумма слева берется по всем μ, таким, что $\|\mu\|=2n$ и разбиение $\mu(\varphi)'$ четно для всех φ. Это число равно также числу невырожденных кососимметрических билинейных форм на k^{2n}.

В действительности имеет место равенство

$$\sum\chi^\mu=\operatorname{ind}_{C_n}^{G_{2n}}(1),$$

где сумма берется по тем же μ, что и выше, а $C_n=Sp_{2n}(k)$ — симплектическая подгруппа в G_{2n}.

6°. Обозначим через N_n подгруппу унипотентных верхних треугольных матриц в G_n. Для каждого набора $b=(b_1,\ldots,b_r)$ целых положительных чисел, дающих в сумме n, определим характер ψ_b группы N_n формулой $\psi_b((h_{ij}))=\psi\left(\sum h_{i,\,i+1}\right)$, где ψ — фиксированный нетривиальный аддитивный характер поля k, а сумма берется по индексам i, отличным от $b_1,\ b_1+b_2,\ \ldots,\ b_1+\ldots+b_{r-1}$. Тогда кратность вхождения неприводимого характера χ^λ в индуцированный характер $\operatorname{ind}_{N_n}^{G_n}(\psi_b)$ равна

$$\sum_a\prod_{\varphi\in\Theta}K_{\lambda(\varphi),\ a(\varphi)^+},$$

где сумма берется по функциям $a\colon\Theta\to(Z^+)^r$, таким, что $\sum_\varphi d(\varphi)\,a(\varphi)=b$, а через a^+ обозначено разбиение, получающееся перестановкой координат вектора a. (Доказательство см. [22°].) В частности, $\operatorname{ind}_{N_n}^{G_n}(\psi_{(n)})=\sum\chi^\nu$, где сумма берется по таким ν, что при всех φ разбиение $\nu(\varphi)$ состоит из единственной строки (этот результат принадлежит И. М. Гельфанду и М. И. Граеву).

Замечания и библиографические указания

Результат примера 4 принадлежит Кондо [24], а результат примера 5 — Клячко [27°], [28°] (для нечетных q утверждение 5(a) также доказано в [34*]). Результат примера 6 принадлежит Зелевинскому [22°].

ПРИЛОЖЕНИЕ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (5.1)

Поскольку f — многочлен от элементарных симметрических функций e_r, предложение достаточно доказать для $f = e_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Заменяя представление ρ его внешними степенями, мы можем считать, что $f = e_1 = t_1 + \ldots + t_n$.

(1) Предположим сначала, что $g = |G|$ взаимно просто с $p = \operatorname{char}(k)$. Тогда $q \bmod g$ есть обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}/(g)$, значит, g делит $q^r - 1$, где $r = \varphi(g)$ (функция Эйлера). Поскольку $u_i(x)^g = 1$ для всех $x \in G$ и $1 \leqslant i \leqslant n$, отсюда следует, что все собственные значения $u_i(x)$ лежат в M_r, значит, роль играет только ограничение θ на M_r. Поскольку M_r — циклическая группа, достаточно доказать предложение для какой-нибудь образующей θ_0 группы $\hat{M}_r$, так как тогда, скажем, $\theta | M_r = \theta_0^s$, и мы можем применить наше предложение (по предположению доказанное для θ_0) к симметрической функции $f(t_1^s, \ldots, t_n^s)$.

Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо целых кругового поля, порожденного корнями из единицы в $\mathbb{C}$ степени $q^r - 1$, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $\mathfrak{o}$, содержащий p. Тогда $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong k_r$, и ρ есть редукция $\bmod\, \mathfrak{p}$ некоторого представления σ группы G с коэффициентами в $\mathfrak{o}$. Пусть U — группа корней из единицы степени $q^r - 1$ в $\mathfrak{o}$. Редукция $\bmod\, \mathfrak{p}$ определяет изоморфизм U на M_r, и мы возьмем в качестве θ_0: $M_r \to U$ обратный изоморфизм. Если $v_i(x)$ — собственные значения преобразования $\sigma(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то каждое $v_i(x)$ есть комплексный корень степени g из единицы, а значит, лежит в U и его редукция $\bmod\, \mathfrak{p}$ есть $u_i(x)$ (при подходящей нумерации $v_i(x)$). Отсюда вытекает, что $\chi(x) = \sum \theta_0(u_i(x)) = \sum v_i(x)$ является следом $\sigma(x)$.

(2) Пусть теперь G — произвольная конечная группа. В силу знаменитой теоремы Брауэра (см., например, Huppert, Endliche Gruppen I, p. 586 [1]) предложение (5.1) достаточно доказать в случае, когда G — элементарная группа, т. е. прямое произведение циклической группы $\langle x \rangle$ и некоторой l-группы, где l — простое число, не делящее порядок элемента x. Тогда G есть прямое произведение p-группы P

[1]) См. также Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. — М.: Мир, 1970, с. 74. — *Прим. перев.*

и группы H порядка, взаимно простого с p. Если $y \in P$, то собственные значения матрицы $\rho(y)$ — это корни из единицы в $\bar{k}$, показатель которых является степенью p, значит, все они равны 1, а так как y коммутирует с каждым $x \in H$, то матрицы $\rho(x)$ и $\rho(y)$ одновременно приводятся к треугольному виду; следовательно, собственные значения для xy те же, что и для x, откуда $\chi(xy) = \chi(x)$. Но в силу первой части доказательства ограничение $\chi|H$ есть характер группы H, значит, χ — характер группы G.

Замечания и библиографические указания

Наше изложение теории характеров группы $GL_n(k)$ следует работе Грина [14] во всех существенных пунктах. Другое изложение, более ориентированное на структурную теорию редуктивных алгебраических групп, см. [50][1]).

[1]) Другой подход к характерам групп $GL_n(k)$, основанный на теории алгебр Хопфа, развит в работах [22°], [18°]. — *Прим. перев.*

Глава V

КОЛЬЦО ГЕККЕ ГРУППЫ GL_n НАД ЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

1. Локальные поля

Пусть F — локально компактное топологическое поле. Мы будем предполагать, что топология поля F не дискретна, поскольку совершенно произвольное поле становится локально компактным, будучи наделенным дискретной топологией. Недискретное локально компактное поле называется *локальным*.

Каждое локальное поле F снабжено каноническим абсолютным значением, которое можно определить следующим образом. Пусть dx — мера Хаара аддитивной группы поля F. Тогда при $a \in F$, $a \neq 0$, абсолютное значение $|a|$ определяется посредством равенства $d(ax) = |a|\,dx$. Эквивалентным образом, для любого измеримого множества E в F мера множества aE отличаётся от меры E множителем $|a|$. Завершая определение, мы полагаем $|0| = 0$. Тогда можно показать, что $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ для всех a, $b \in F$ и что функция расстояния $d(a, b) = |a - b|$ определяет исходную топологию в F.

Теперь имеются две возможности. Если абсолютное значение $|a|$ удовлетворяет аксиоме Архимеда, то F связно и можно показать, что оно изоморфно либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$; это *архимедовы* локальные поля. Другая возможность состоит в том, что абсолютное значение $|a|$ неархимедово; в этом случае F вполне несвязно (единственными связными подмножествами в F являются точки): это *неархимедовы* локальные поля.

Классификация неархимедовых локальных полей описывается просто. Если F имеет характеристику 0, то это конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел для некоторого простого p. Если F имеет характеристику >0, то оно является полем формальных степенных рядов от одного переменного над конечным полем.

Всюду в дальнейшем F будет неархимедовым локальным полем. Положим $\mathfrak{o} = \{a \in F\colon |a| \leqslant 1\}$ и $\mathfrak{p} = \{a \in F\colon |a| < 1\}$. Тогда $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{p}$ являются компактными открытыми подмножествами в F; более того, $\mathfrak{o}$ есть *подкольцо* в F, а $\mathfrak{p}$ — идеал в $\mathfrak{o}$. Кольцо $\mathfrak{o}$ называется *кольцом целых* поля F; это полное дискретно нормированное кольцо, причем F является его полем частных. Идеал $\mathfrak{p}$ максимален в $\mathfrak{o}$, а поле $k = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$

конечно (так как оно одновременно компактно и дискретно). Пусть q обозначает число элементов поля k, а π — образующая идеала $\mathfrak{p}$. Имеем $|\pi| = q^{-1}$; значит, абсолютное значение $|a|$ любого элемента $a \neq 0$ в F есть степень (положительная или отрицательная) числа q. *Нормализованное нормирование* v: $F^* \to \mathbb{Z}$ определяется формулой

$$v(x) = n \Leftrightarrow x = u\pi^n,$$

где u — обратимый элемент в $\mathfrak{o}$ (т. е. $|u| = 1$).

2. Кольцо Гекке $H(G, K)$

Пусть F — неархимедово локальное поле, и пусть $G = GL_n(F)$ — группа всех обратимых $n \times n$-матриц над F. Пусть также

$$G^+ = G \cap M_n(\mathfrak{o})$$

— подполугруппа в G, состоящая из матриц $x \in G$ с элементами $x_{ij} \in \mathfrak{o}$, и пусть

$$K = GL_n(\mathfrak{o}) = G^+ \cap (G^+)^{-1},$$

так что K состоит из всех $x \in G$ с элементами $x_{ij} \in \mathfrak{o}$, таких, что $\det(x)$ есть обратимый элемент в $\mathfrak{o}$.

Можно рассматривать G как открытое подмножество в пространстве матриц $M_n(F) = F^{n^2}$, откуда G наследует топологию, в которой она является локально компактной топологической группой. Поскольку $\mathfrak{o}$ компактно и открыто в F, то G^+ компактно и открыто в G, а K является компактной открытой подгруппой в G.

Мера Хаара в G задается формулой

$$dx = \Big(\prod_{i,j} dx_{ij}\Big) \Big/ |\det x|^n$$

и является левоинвариантной и правоинвариантной. В частности, $dx = dx^t$, где x^t — матрица, транспонированная к x.

В дальнейшем через dx будем обозначать единственную меру Хаара на G, для которой мера K равна 1.

Далее, обозначим через $L(G, K)$ (соответственно $L(G^+, K)$) пространство непрерывных комплекснозначных функций с компактным носителем на G (соответственно на G^+), биинвариантных относительно K, т. е. таких, что $f(k_1xk_2) = f(x)$ для всех $x \in G$ (соответственно G^+) и $k_1, k_2 \in K$. Мы можем и будем рассматривать $L(G^+, K)$ как подпространство в $L(G, K)$.

Определим умножение в $L(G, K)$ следующим образом: при $f, g \in L(G, K)$

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})\, g(y)\, dy$$

(поскольку f и g имеют компактный носитель, то интегрирование идет по компактному множеству). Это произведение ассоциативно, и мы вскоре увидим, что оно коммутативно. Поскольку G^+ замкнуто относительно умножения, из определения сразу вытекает, что $L(G^+, K)$ есть подкольцо в $L(G, K)$.

Каждая функция $f \in L(G, K)$ постоянна на всех двойных смежных классах KxK в G. Эти двойные смежные классы компактны, открыты и попарно не пересекаются. Поскольку носитель f компактен, отсюда следует, что она принимает ненулевые значения лишь на конечном числе двойных классов KxK, а значит, может быть записана как конечная линейная комбинация их характеристических функций. Следовательно, характеристические функции двойных классов по K в G образуют $\mathbb{C}$-*базис* в $L(G, K)$. Характеристическая функция самой подгруппы K есть единичный элемент в $L(G, K)$.

Если изменить определение алгебры $L(G, K)$ (соответственно $L(G^+, K)$), потребовав, чтобы функции принимали значения в $\mathbb{Z}$ вместо $\mathbb{C}$, то получающееся кольцо называется *кольцом Гекке* группы G (соответственно G^+) и обозначается через $H(G, K)$ (соответственно $H(G^+, K)$). Очевидно, что

(2.1) $\quad L(G, K) \cong H(G, K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}, \quad L(G^+, K) \cong H(G^+, K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$

Наша первая цель — показать, что кольцо Гекке $H(G, K)$ тесно связано с алгеброй Холла $H(\mathfrak{o})$ дискретно нормированного кольца $\mathfrak{o}$.

Рассмотрим двойной класс KxK, где $x \in G$. Умножая элемент x на подходящую степень π (образующей идеала $\mathfrak{p}$), мы можем перевести его внутрь G^+. Теория элементарных делителей для матриц над областью главных идеалов показывает теперь, что, умножая x слева и справа на подходящие элементы из K, мы можем привести его к диагональному виду. После этого, умножая на диагональную матрицу, принадлежащую K, приходим к диагональной матрице, элементы которой есть степени π, и, наконец, сопряжение с помощью матрицы перестановки располагает показатели в убывающем порядке. Таким образом, получаем

(2.2) *Каждый двойной класс KxK обладает единственным представителем вида*

$$\pi^\lambda = \operatorname{diag}(\pi^{\lambda_1}, \ldots, \pi^{\lambda_n}),$$

где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. При этом $\lambda_n \geqslant 0$ (так что λ есть разбиение) тогда и только тогда, когда $x \in G^+$. ∎

Обозначим через c_λ характеристическую функцию двойного класса $K\pi^\lambda K$. Тогда в силу (2.2) имеем

(2.3) *Элементы c_λ (соответственно такие c_λ, что $\lambda_n \geqslant 0$) образуют $\mathbb{Z}$-базис в $H(G, K)$ (соответственно в $H(G^+, K)$). Характеристическая функция c_0 подгруппы K есть единичный элемент в $H(G, K)$ и $H(G^+, K)$.* ∎

Теперь мы можем доказать, что кольцо $H(G, K)$ (а значит, и $H(G^+, K)$, $L(G, K)$ и $L(G^+, K)$) коммутативно:

(2.4) *Пусть $f, g \in H(G, K)$. Тогда $f * g = g * f$.*

Доказательство. Пусть t: $G \to G$ — отображение транспонирования, $t(x) = x^t$. Очевидно, что K устойчива относительно t, а так как в силу (2.2) каждый двойной класс KxK содержит диагональную матрицу, отсюда следует, что KxK устойчив относительно t. Значит, $f \circ t = f$ для всех $f \in H(G, K)$, и, следовательно,

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy)\, g(y^{-1})\, dy =$$
$$= \int_G f(y^t x^t)\, g\left((y^t)^{-1}\right) dy^t = (g * f)(x^t) = (g * f)(x). \ ∎$$

(2.5) $$H(G, K) = H\left(G^+, K\right)\left[c_{(1^n)}^{-1}\right].$$

Доказательство. Поскольку $\pi^{(1^n)} = \pi 1_n$ лежит в центре G, легкое вычисление показывает, что для всех λ и всех целых r имеем $c_\lambda * c_{(r^n)} = c_{\lambda + (r^n)}$, где $\lambda + (r^n)$ есть последовательность $(\lambda_1 + r, \ldots, \lambda_n + r)$. В частности, отсюда следует, что характеристическая функция $c_{(1^n)}$ класса $K\pi^{(1^n)}K = \pi K$ есть обратимый элемент кольца $H(G, K)$, причем ее r-я степень равна $c_{(r^n)}$ для всех $r \in \mathbb{Z}$. Отсюда непосредственно вытекает (2.5). ∎

Ввиду (2.5) мы можем сконцентрировать внимание на кольце $H(G^+, K)$, которое в силу (2.3) имеет $\mathbb{Z}$-базис, состоящий из характеристических функций c_λ, где λ пробегает все *разбиения* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ длины $\leqslant n$.

Пусть μ, ν — разбиения длины $\leqslant n$. Произведение $c_\mu * c_\nu$ будет линейной комбинацией функций c_λ. В действительности

(2.6) $$c_\mu * c_\nu = \sum_\lambda g_{\mu\nu}^\lambda(q)\, c_\lambda,$$

где сумма берется по разбиениям λ длины $\leqslant n$, а $g^{\lambda}_{\mu\nu}(q)$ есть «многочлен Холла», определенный в § 2 гл. II.

Доказательство. Обозначим коэффициент при c_λ в $c_\mu * c_\nu$ через $h^{\lambda}_{\mu\nu}$. Тогда

$$h^{\lambda}_{\mu\nu} = (c_\mu * c_\nu)(\pi^\lambda) = \int_G c_\mu(\pi^\lambda y^{-1})\, c_\nu(y)\, dy.$$

Поскольку $c_\nu(y)$ обращается в нуль, когда y лежит вне $K\pi^\nu K$, то интегрирование идет по этому двойному классу, который мы запишем как объединение правых смежных классов, скажем

$$K\pi^\nu K = \bigcup_j K y_j \qquad (y_j \in \pi^\nu K).$$

Аналогично, пусть

$$K\pi^\mu K = \bigcup_i K x_i \qquad (x_i \in \pi^\mu K),$$

причем оба объединения дизъюнктны. Тогда

$$h^{\lambda}_{\mu\nu} = \sum_j \int_{Ky_j} c_\mu(\pi^\lambda y^{-1})\, dy = \sum_j \int_K c_\mu(\pi^\lambda y_j^{-1} k)\, dk = \sum_j c_\mu(\pi^\lambda y_j^{-1}),$$

поскольку мера K есть 1.

Далее,

$$c_\mu(\pi^\lambda y_j^{-1}) \neq 0 \Leftrightarrow \pi^\lambda y_j^{-1} \in Kx_i \text{ для некоторого } i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi^\lambda \in Kx_i y_j \quad \text{для некоторого } i.$$

Таким образом, коэффициент $h^{\lambda}_{\mu\nu}$ равен числу пар (i, j), таких, что $\pi^\lambda = kx_i y_j$ для некоторого $k \in K$ (зависящего от i, j).

Обозначим через L решетку $\mathfrak{o}^n$ в векторном пространстве F^n. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — стандартный базис в F^n, и пусть G действует на F^n *справа* (т. е. мы представляем себе элементы из F^n как векторы-строки, а не как векторы-столбцы). Тогда $L\pi^\lambda$ — подрешетка в L, порожденная векторами $\pi^{\lambda_i}\xi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; следовательно, $M = L/L\pi^\lambda$ является конечным $\mathfrak{o}$-модулем типа λ (гл. II, § 1).

Рассмотрим решетку Lx_i. Поскольку $x_i \in \pi^\mu K$, то $Lx_i = L\pi^\mu k$ для некоторого $k \in K$, откуда $L/Lx_i \cong L/L\pi^\mu$, т. е. это конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа μ. Рассмотрим, далее, модуль $N = Lx_i/L\pi^\lambda = Lx_i/Lx_i y_j$. Поскольку $y_j \in \pi^\nu K$, отсюда, как и выше, следует, что N имеет тип ν. Таким образом, для каждой пары (i, j), такой, что $\pi^\lambda \in Kx_i y_j$, мы имеем подмодуль N в M котипа μ и типа ν. Обратно, каждый подмодуль N в M котипа μ и типа ν определяет пару (i, j), такую, что $\pi^\lambda \in Kx_i y_j$. Значит, $h^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda}_{\mu\nu}(q)$. ∎

Из (2.6) вытекает, что отображение $u_\lambda \mapsto c_\lambda$ есть эпиморфизм алгебры Холла $H(\mathfrak{o})$ на $H(G^+, K)$, ядро которого порождено элементами u_λ с $l(\lambda) > n$. Поэтому из (3.4) гл. III мы получаем структурную теорему для колец $H(G^+, K)$ и $L(G^+, K)$:

(2.7) *Пусть $\Lambda_n[q^{-1}]$ (соответственно $\Lambda_{n,\mathbb{C}}$) обозначает кольцо симметрических многочленов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ (соответственно $\mathbb{C}$). Тогда $\mathbb{Z}$-линейное отображение θ кольца $H(G^+, K)$ в $\Lambda_n[q^{-1}]$ (соответственно $\mathbb{C}$-линейное отображение $L(G^+, K)$ в $\Lambda_{n,\mathbb{C}}$), определяемое формулой $\theta(c_\lambda) = q^{-n(\lambda)} P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; q^{-1})$ для всех разбиений λ длины $\leqslant n$, является инъективным гомоморфизмом колец (соответственно изоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебр).* ∎

Замечание. В силу (2.8) гл. III и (2.7)

$$\theta\left(c_{(1^n)}\right) = q^{-n(n-1)/2} x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Поэтому из (2.5) вытекает, что гомоморфизм θ продолжается до инъективного гомоморфизма кольца $H(G, K)$ в алгебру симметрических многочленов от $x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ и до изоморфизма между алгеброй $L(G, K)$ и алгеброй симметрических многочленов от $x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$.

В следующем разделе нам понадобится мера двойного класса $K\pi^\lambda K$. Ее можно вычислить следующим образом. При $f \in L(G^+, K)$ положим

$$\mu(f) = \int_G f(x)\, dx.$$

Тогда μ: $L(G^+, K) \to \mathbb{C}$ есть гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр, и, очевидно,

(2.8) $$\mu(c_\lambda) = \text{мера класса } K\pi^\lambda K.$$

Ввиду (2.7) можно записать $\mu = \mu' \circ \theta$, где $\mu'\colon \Lambda_{n,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ — гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр, а значит, определяется своим действием на образующие e_r $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Так как $e_r = P_{(1^r)}(x_1, \ldots, x_n; q^{-1})$ (гл. III, (2.8)), то достаточно вычислить меру класса $K\pi^\lambda K$, когда $\lambda = (1^r)$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Далее, мера $K\pi^\lambda K$ равна числу классов Kx_i, содержащихся в $K\pi^\lambda K$. Каждому из этих классов соответствует подрешетка Lx_i в $L = \mathfrak{o}^n$, такая, что L/Lx_i есть конечный $\mathfrak{o}$-модуль типа λ. Поэтому мера $K\pi^\lambda K$ равна числу подрешеток L' в L, таких, что L/L' имеет тип λ. В частности, при $\lambda = (1^r)$ каждая такая решетка L' будет удовлетворять условию $\pi(L/L') = 0$, т. е. $\pi L \subset L'$. Далее, $L/\pi L \cong k^n$ есть n-мерное векторное про-

странство над конечным полем k, а $L'/\pi L$ — его подпространство коразмерности r. Число таких подпространств равняется гауссову многочлену $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}(q)$ (гл. I, § 2, пример 3), и, следовательно,

$$\mu(c_{(1^r)}) = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}(q) \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

Из (2.7) вытекает, что $\mu'(e_r) = q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}(q)$, а это (цит. выше) есть r-я элементарная симметрическая функция от $q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, 1$. Таким образом, отображение μ' переводит x_i в q^{n-i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Значит, из (2.7) и (2.8) вытекает, что мера $K\pi^\lambda K$ есть $q^{-n(\lambda)} P_\lambda(q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, 1; q^{-1})$, что в силу примера 1 § 2 гл. III равняется

$$\left(q^{-n(\lambda)}/v_\lambda(q^{-1})\right) q^{\sum (n-i)\lambda_i} v_n(q^{-1}).$$

Таким образом, получаем формулу

$$\text{(2.9)} \qquad \text{мера } K\pi^\lambda K = q^{\sum (n-2i+1)\lambda_i} v_n(q^{-1})/v_\lambda(q^{-1}) = \\ = q^{2\langle\lambda, \rho\rangle} v_n(q^{-1})/v_\lambda(q^{-1}),$$

где $\rho = \frac{1}{2}(n-1, n-3, \ldots, 1-n)$.

3. Сферические функции

Сферической функцией на G относительно K называется непрерывная комплекснозначная функция ω на G, удовлетворяющая следующим условиям:

(a) ω биинвариантна относительно K, т. е. $\omega(k_1 x k_2) = \omega(x)$ при $x \in G$ и $k_1, k_2 \in K$;

(b) $\omega * f = \lambda_f \omega$ для всех $f \in L(G; K)$, где λ_f — некоторое комплексное число; другими словами, ω является собственной функцией всех операторов свертки, определяемых элементами из $L(G, K)$;

(c) $\omega(1) = 1$.

В силу (b) и (c) скаляр λ_f задается формулой

$$\lambda_f = (\omega * f)(1) = \int_G f(x)\,\omega(x^{-1})\,dx.$$

Рассматриваемая как функция от ω, λ_f называется *преобразованием Фурье* функции f и обозначается через $\hat{f}(\omega)$. Рассматриваемая как функция от f при фиксированном ω, она записывается в виде $\hat{\omega}(f)$.

При $f, g \in L(G, K)$ в силу (b)

$$\lambda_{f*g}\omega = \omega * (f * g) = (\omega * f) * g = \lambda_f \lambda_g \omega,$$

откуда $\lambda_{f*g} = \lambda_f \cdot \lambda_g$, или, что эквивалентно,

$$\hat{\omega}(f * g) = \hat{\omega}(f)\,\hat{\omega}(g). \tag{3.1}$$

Ясно, кроме того, что $\omega * c_0 = \omega$, где c_0 — единичный элемент кольца $L(G, K)$ (характеристическая функция подгруппы K). Значит, $\hat{\omega}(c_0) = 1$, а следовательно, (3.1) показывает, что

(3.2) $\hat{\omega} : L(G, K) \to \mathbb{C}$ *является гомоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебр.*

Обратно, можно показать, что все гомоморфизмы $\mathbb{C}$-алгебр $L(G, K) \to \mathbb{C}$ получаются таким способом из сферических функций, так что множество $\Omega(G, K)$ сферических функций на G относительно K можно отождествить с комплексным аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом $L(G, K)$. В силу замечания после (2.7) $L(G, K)$ изоморфно $\mathbb{C}$-алгебре $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]^{S_n}$; но $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ — координатное кольцо многообразия $(\mathbb{C}^*)^n$, следовательно, $\Omega(G, K)$ можно канонически отождествить с n-й симметрической степенью пунктированной аффинной прямой $\mathbb{C}^*$. Значит, сферические функции могут быть параметризованы наборами $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ненулевых комплексных чисел, причем порядок компонент z_i несуществен. Более удобно, однако, взять в качестве параметра $s = (s_1, \ldots, s_n)$, где $z_i = q^{(n-1)/2 - s_i}$ (так что $s_i \in \mathbb{C} \pmod{2\pi i\mathbb{Z}/\log q}$).

Обозначим сферическую функцию с параметром s через ω_s. Тогда $\omega_s = \omega_{ws}$ при всех $w \in S_n$.

(3.3) *Преобразование Фурье характеристической функции c_λ задается формулой*

$$\hat{c}_\lambda(\omega_s) = q^{\langle \lambda, \rho \rangle} P_\lambda(q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_n}; q^{-1}).$$

Доказательство. Из предыдущего обсуждения и (2.7) ясно, что гомоморфизм $\hat{\omega}_s$ есть композиция θ и специализации $x_i \mapsto z_i = q^{(n-1)/2 - s_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Поэтому наш результат вытекает из (2.7). ∎

Далее,

$$\hat{c}_\lambda(\omega_s) = \int_G c_\lambda(x)\,\omega_s(x^{-1})\,dx = \omega_s(\pi^{-\lambda}) \times \text{мера } K\pi^\lambda K.$$

Из (3.3) и (2.9) вытекает, что

$$\omega_s(\pi^{-\lambda}) = \frac{q^{-\langle \lambda, \rho \rangle}}{v_n(q^{-1})} v_\lambda(q^{-1})\, P_\lambda(q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_n}; q^{-1}),$$

и, следовательно, по определению симметрических функций P_λ (гл. III, § 2)

$$(3.4)\qquad \omega_s(\pi^{-\lambda}) = \frac{q^{-\langle\lambda,\rho\rangle}}{v_n(q^{-1})} \sum_{w\in S_n} w\left(q^{-\langle\lambda,s\rangle} \prod_{i<j} \frac{q^{-s_i} - q^{-(s_j+1)}}{q^{-s_i} - q^{-s_j}}\right)$$

(всегда предполагается, что $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$). Так как функция ω_s по определению постоянна на двойных смежных классах по K в G, то формула (3.4) дает значение сферической функции ω_s на всех элементах G.

В частности, при $s = \rho$ имеем $\omega_\rho(\pi^{-\lambda}) = 1$ для всех λ, так что ω_ρ есть постоянная функция 1 (тривиальная сферическая функция).

Из (3.4) легко следует, что

$$(3.5)\qquad \omega_s(x^{-1}) = \omega_{-s}(x)$$

для всех $x \in G$.

Пример

Функция ω_s ограничена $\Leftrightarrow Re(s)$ лежит в выпуклой оболочке множества $S_n\rho = \{w\rho\colon w \in S_n\}$.

Положим $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, т. е. $\sigma_i = \mathrm{Re}(s_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Так как $\omega_{ws} = \omega_s$ для всех $w \in S_n$, то можно считать, что $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n$. Тогда старший член в (3.4) есть $q^{-\langle\lambda,\, s+\rho\rangle}$ с абсолютным значением $q^{-\langle\lambda,\,\sigma+\rho\rangle}$. Значит, ω_s ограничена тогда и только тогда, когда $q^{-\langle\lambda,\,\sigma+\rho\rangle} \leqslant 1$ для всех λ, таких, что $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, т. е. тогда и только тогда, когда $\langle\lambda, \sigma+\rho\rangle \geqslant 0$ для всех таких λ; легко видеть, что это условие эквивалентно тому, что $\sigma \in \mathrm{Conv}(S_n\rho)$.

4. Ряд Гекке и дзета-функции для $GL_n(F)$

Для всех целых $m \geqslant 0$ положим

$$G_m^+ = \{x \in G^+\colon\ v(\det x) = m\},$$

где v — нормализованное нормирование на F (§ 1). Множество G_m^+ есть дизъюнктное объединение двойных классов $K\pi^\lambda K$, где λ пробегает все разбиения числа m длины $\leqslant n$. В частности, $G_0^+ = K$. Обозначим через τ_m характеристическую функцию множества G_m^+, так что

$$\tau_m = \sum_{|\lambda|=m} c_\lambda.$$

Ряд Гекке пары (G, K) есть по определению формальный степенной ряд

$$(4.1)\qquad \tau(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m X^m \in H(G^+, K)[[X]].$$

Полученные выше результаты позволяют вычислить $\tau(X)$ без всяких затруднений. В самом деле, в силу (2.7)

$$\theta(\tau_m) = \sum_{|\lambda|=m} q^{-n(\lambda)} P_\lambda(x_1, \ldots, x_n; q^{-1}) = h_m(x_1, \ldots, x_n),$$

согласно примеру 1 § 3 гл. III. Значит,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \theta(\tau_m) X^m = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i X)^{-1}. \tag{4.2}$$

Поскольку

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i X) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r X^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r P_{(1^r)}(x_1, \ldots, x_n; q^{-1}) X^r =$$
$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \theta(c_{(1^r)}) X^r$$

снова в силу (2.7), из (4.2) вытекает, что

$$\tau(X) = \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{r(r-1)/2} c_{(1^r)} X^r \right)^{-1} \tag{4.3}$$

— эта формула впервые получена Тамагавой [52].

Пусть теперь ω — сферическая функция на G относительно K, и пусть s — комплексное переменное. *Дзета-функция* $\zeta(s, \omega)$ определяется формулой

$$\zeta(s, \omega) = \int_G \varphi(x) \| x \|^s \omega(x^{-1}) \, dx, \tag{4.4}$$

где dx, как обычно, мера Хаара на G, нормализованная условием $\int_K dx = 1$, функция φ — характеристическая функция полугруппы G^+ и $\| x \| = |\det(x)| = q^{-v(\det x)}$. Временно будем игнорировать вопросы сходимости и обращаться с s (или, скорее, с q^{-s}) как с независимым переменным. Имеем

$$\zeta(s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{-ms} \int_G \tau_m(x) \omega(x^{-1}) \, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\omega}(\tau_m) q^{-ms} =$$
$$= \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \hat{\omega}(c_{(1^r)}) q^{-rs} \right)^{-1}$$

в силу (4.3).

Если $\omega = \omega_s$, то из (4.2) вытекает, что

$$\zeta(s, \omega_s) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - q^{(n-1)/2 - s_i - s}\right)^{-1}. \tag{4.5}$$

Эти формальные вычисления будут законными и интеграл (4.4) будет сходиться при условии, что $\left| q^{(n-1)/2-s_i-s} \right| < 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. когда s лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$, где

$$\sigma_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\frac{n-1}{2} - \operatorname{Re}(s_i) \right).$$

В этой полуплоскости интеграл (4.4) определяет мероморфную функцию от s, заданную формулой (4.5), которая аналитически продолжает функцию $\zeta(s, \omega)$ на всю s-плоскость.

В частности, для тривиальной сферической функции $\omega_\rho = 1$ имеем $s_i = (n+1)/2 - i$; следовательно,

$$\zeta(s, 1) = \prod_{i=1}^{n} (1 - q^{i-1-s})^{-1}. \tag{4.6}$$

5. Ряд Гекке и дзета-функции для $GSp_{2n}(F)$

В этом разделе мы покажем, как знание сферических функций для $GL_n(F)$ позволяет явно вычислить ряд Гекке для группы симплектических подобий $GSp_{2n}(F)$; тем самым будет завершено вычисление, начатое Сатаке в [43] (к этой работе мы отсылаем читателя за доказательствами).

Пусть i обозначает $n \times n$-матрицу с единицами на побочной диагонали и нулями в остальных местах, и пусть

$$j = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа симплектических подобий $G = GSp_{2n}(F)$ — это группа матриц $x \in GL_{2n}(F)$, таких, что xjx^t отличается от j скалярным множителем, скажем

$$xjx^t = \mu(x)\, j,$$

где $\mu(x) \in F^*$. Положим

$$K = GSp_{2n}(\mathfrak{o}) = G \cap GL_{2n}(\mathfrak{o}), \qquad G^+ = G \cap M_{2n}(\mathfrak{o}).$$

Тогда G — локально компактная группа, K — ее максимальная компактная подгруппа, причем K открыта в G, а G^+ — подполугруппа в G. Кольца Гекке $H(G, K)$, $H(G^+, K)$ и $\mathbb{C}$-алгебры $L(G, K) \cong H(G, K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, $L(G^+, K) \cong H(G^+, K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ определяются, как в § 2. Характеристические функции двойных классов $KxK \subset G$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в $H(G, K)$. Кроме того, кольцо $H(G, K)$ коммутативно по той же причине, что и в случае $GL_n(F)$ (2.4).

Сферические функции ω на G относительно K определяются, как в § 3, и находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами $\mathbb{C}$-алгебр $\hat{\omega}$: $L(G, K) \to \mathbb{C}$. Эти

сферические функции параметризуются векторами $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ([43], гл. III).

Определим отображения ε_i: $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ формулой

$$\varepsilon_i (s_0, s_1, \ldots, s_n) = (s_0 + s_i, s_1, \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Операторы ε_i порождают группу E порядка 2^n. Кроме того, симметрическая группа S_n действует перестановками координат $s_1, \ldots, s_n$. Пусть $W \subset GL_{n+1}(\mathbb{C})$ — группа, порожденная E и S_n; она является полупрямым произведением $E \times S_n$. Тогда [43] $\omega_s = \omega_{ws}$ для всех $w \in W$, где ω_s — сферическая функция на $G = GSp_{2n}(F)$ с параметром s.

Далее, положим

$$G_m^+ = \{x \in G^+ : v(\mu(x)) = m\}$$

для всех $m \geqslant 0$, и пусть τ_m обозначает характеристическую функцию G_m^+. Ряд Гекке $\tau(X)$ и ряд $\hat{\tau}(s, X)$ определяются, как в § 4:

$$\tau(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m X^m, \qquad \hat{\tau}(s, X) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\tau}_m(\omega_s) X^m.$$

Далее, в силу [43, Appendix 1] имеем следующее выражение для $\hat{\tau}_m(\omega_s)$:

(5.1) $$\hat{\tau}_m(\omega_s) = \sum_{\lambda} q^{-\langle\lambda, \rho\rangle} \hat{c}_\lambda(\omega_{s'}) q^{m(N-s_0)},$$

где $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, $s' = (s_1, \ldots, s_n)$, $N = n(n+1)/4$, $\hat{c}_\lambda(\omega_{s'})$ имеет тот же смысл, что и в § 3, а суммирование идет по всем разбиениям λ, таким, что $\lambda_1 \leqslant m$. Из (3.3) и (5.1) следует, что

$$\hat{\tau}_m(\omega_s) = \sum_{\lambda} P_\lambda\left(q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_n}; q^{-1}\right) q^{m(N-s_0)},$$

а значит, что

(5.2) $$\hat{\tau}(s, X) = \sum_{m, \lambda} P_\lambda\left(q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_n}; q^{-1}\right)\left(q^{N-s_0}X\right)^m,$$

где сумма берется по $m \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$.

Но сумма в правой части (5.2) уже вычислена нами в примере 5 § 5 гл. III. Поэтому получаем следующее выражение для $\hat{\tau}(s, X)$ в виде суммы простейших дробей:

(5.3) $$\hat{\tau}(s, X) = \sum_{w \in E} w\left(\Phi\left(q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_n}; q^{-1}\right)\left(1 - q^{N-s_0}X\right)^{-1}\right),$$

где

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{-1} \prod_{i<j} (1 - t x_i x_j)(1 - x_i x_j)^{-1}.$$

Из (5.3) вытекает, что $\hat{\tau}(s, X)$ — рациональная функция $f(X_0)/g(X_0)$, где $X_0 = q^{N-s_0}X$, со знаменателем

$$g(X_0) = \prod_J (1 - q^{-s_J}X_0),$$

где произведение берется по всем подмножествам J в $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $s_J = \sum_{i \in J} s_i$. Кроме того, нетрудно показать, что степень числителя $f(X_0)$ равна $2^n - 2$.

Наконец, сферической функции ω_s можно, как и в § 4, поставить в соответствие дзета-функцию: как и выше, мы полагаем

$$\zeta(s, \omega_s) = \int_G \varphi(x) \|x\|^s \omega_s(x^{-1})\, dx,$$

где s — комплексное переменное, φ — характеристическая функция полугруппы G^+ и $\|x\| = |\mu(x)|$. Тогда

$$\zeta(s, \omega_s) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\tau}_m(\omega_s) q^{-ms} = \hat{\tau}(s, q^{-s}),$$

и, следовательно, из (5.3) мы получаем такую формулу для этой дзета-функции:

$$\zeta(s, \omega_s) = \sum_{w \in E} w\left(\Phi(q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_n}; q^{-1})(1 - q^{N-s_0-s})^{-1}\right) \tag{5.4}$$

Замечания и библиографические указания

За основными сведениями об алгебраических группах над локальными полями, их кольцах Гекке и сферических функциях мы отсылаем читателя к [32], [43] и данным там ссылкам.

Мы вывели формулу (3.4) для сферических функций, используя наше знание алгебры Холла. Можно получить (3.4) непосредственным вычислением сферической функции из интегральной формулы. Это сделано в [32, Ch. IV] в значительно большей общности и в случае GL_n дает более естественное (хотя и менее элементарное) доказательство структурной теоремы (3.4) гл. III для алгебры Холла.

Формула (3.4) была также получена Люксом [31].

ЛИТЕРАТУРА

1. Aitken A. C. Note on dual symmetric functions. — Proc. Edin. Math. Soc. **2** (2), 1931, 164—167.
2. Andrews G. E. The theory of partitions. — Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 2, Addison-Wesley, 1976. [Имеется перевод: Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.]
3. Andrews G. E. MacMahon's conjecture on symmetric plane partitions. — Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **74**, 1977, 426—429.
4. Andrews G. E. The weak Macdonald conjecture. — Invent. Math. **53**, 1979, 193—225.
5. Berthelot P. Généralités sur les λ-anneaux. — In SGA 6 (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67), Lecture Notes in Math., 225, Springer-Verlag, 1971.
6. Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, Chapters IV, V, VI. — Herman (Paris), 1968. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.]
7. Burge W. H. For correspondences betwen graphs and generalized Young tableaux. — J. Comb. Theory (A) **17**, 1974, 12—30.
8. Deligne P. Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions *L*. — Lecture Notes in Math., 349, Springer-Verlag, 1972, pp. 501—597.
9. Foulkes H. O. Differential operators associated with *S*-functions. — J. London Math. Soc. **24**, 1949, 136—143.
10. Foulkes H. O. A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions. — In Permutations, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
11. Frame J. S., Robinson G. de B., and Thrall R. M. The hook graphs of S_n. — Canad. J. Math. **6**, 1954, 316—324.
12. Frobenius F. G. Über die Charactere der symmetrischen Gruppe. — Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1900, 516—534. (= Ges. Abhandlungen 3, 148—166). [Имеется перевод: Фробениус Г. Теория характеров и представлений групп.— Харьков: ОНТИ, 1937.]
13. Gansner E. R. Matrix correspondences and the enumeration of plane partitions. — Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1978.
14. Green J. A. The characters of the finite general linear groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 1955, 402—447.
15. Green J. A. Symmetric functions and *p*-modules (lecture notes, Manchester), 1961.
16. Green J. A. Les polynômes de Hall et les caractères des groups $GL(n, q)$. — Colloque d'algèbre supérieure, Brussels, 1956, pp. 207—215.
17. Hall P. The algebra of partitions. — Proc. 4th Canadian Math. Congress, Banff., 1959, pp. 147—159.
18. Hammond J. On the use of certain differential operators in the theory of equations. — Proc. London Math. Soc. **14**, 1883, 119—129.
19. Hotta R., Springer T. A. A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups. — Inv. Math. **41**, 1977, 113—127.
20. Jacobi C. G. De functionibus alternantibus ... — Grelle's Journal, **22**, 1841, 360—371 (= Werke 3, 439—452).
21. Klein T. The Hall polynomial. — J. Alg. **12**, 1969, 61—78.
22. Knuth D. E. Permutations, matrices and generalized Young tableaux. — Pacific J. Math. **34**, 1970, 709—727.
23. Knutson D. λ-rings and the representation theory of the symmetric group. — Lecture Notes in Math., 308, Springer-Verlag, 1973
24. Kondo T. On Gaussian sums attached to the general linear groups over finite fields. — J. Math. Soc. Japan **15**, 1963, 244—255.
25. Kostka C. Über den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Funktionen. — Grelle's Journal **93**, 1882, 89—123.

26. Lascoux A. Classes de Chern d'un produit tensoriel. — C. R. Acad. Sci. Paris **286A**, 1978, 385—387.
27. Lascoux A., Schützenberger M. P. Sur une conjecture de H. O. Foulkes. — C. R. Acad. Sci. Paris **286A**, 1978, 323—324.
28. Littlewood D. E., Richardson A. R. Group characters and algebra. — Phil. Trans. A **233**, 1934, 99—141.
29. Littlewood D. E. The theory of group characters. — 2nd edn. Oxford University Press, 1950.
30. Littlewood D. E. On certain symmetric functions. — Proc. London Math. Soc. **43**, 1961, 485—498.
31. Luks E. M. Spherical functions on GL_n over p-adic fields. — Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1966.
32. Macdonald I. G. Spherical functions on a group of p-adic type. — Publ. Ramanujan Inst. No. 2, Madras, 1971. [Имеется перевод: Макдональд И. Г. Сферические функции на группе p-адического типа. — УМН, т. **28**, вып. 5, 1973, 155—224.]
33. Macdonald I. G. Conjugacy classes of odd order in Coxeter groups. (In preparation.)
34. Macdonald I. G. Zeta functions attached to finite general linear groups. — Math. Ann. **249**, 1980, 1—15.
35. MacMahon P. A. Combinatory Analysis I, II. — Cambridge University Press, 1915, 1916 (Reprinted by Chelsea (New York), 1960).
36. Morris A. O. The characters of the groups $GL(n, q)$. — Math. Zeitschrift **81**, 1963, 112—123.
37. Morris A. O. A note on the multiplication of Hall functions. — J. London Math. Soc. **39**, 1964, 481—488.
38. Morris A. O. Generalizations of the Cauchy and Schur identities. — J. Comb. Theory **11A**, 1971, 163—169.
39. Robinson G. de B. On the representations of S_n, I. — Amer. J. Math. **60**, 1938, 745—760.
40. Robinson G. de B. Representation theory of the symmetric group. — Edinburgh University Press, 1961.
41. Rota G. — C. On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of Möbius functions. — Z. Wahrscheinlichkeits theorie 2, 1964, 340—368.
42. Ryser H. J. Combinatorial mathematics, Wiley, 1963. [Имеется перевод: Райзер Г. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966.]
43. Satake I. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. — Publ. Math. IHES **18**, 1963, 5—70.
44. Schur I. Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. — Dissertation, Berlin, 1901 (= Ges. Abhandlungen **1**, 1—72).
45. Schur I. Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. — Crelle's J. **139**, 1911, 155—250 (= Ges. Abhandlungen **1**, 346—441).
46. Schützenberger M. — P. La correspondance de Robinson. — In Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Strasbourg 1976, Lecture Notes in Math., 579, Springer-Verlag, 1977.
47. Schützenberger M. — P. Propriétés nouvelles des tableaux de Young. Séminaire Delange — Pisot — Poitou, 19e année, 1977/78, no. 26, Secrétariat Mathématique, Paris, 1977/78.
48. Shimura G. Introduction to the arithmentic theory of automorphic functions. — Publ. Math. Soc. Japan, No. 11, Princeton Univ. Press, 1971. [Имеется перевод: Шимура Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. — М.: Мир, 1973.]
49. Spaltenstein N. The fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold. — Proc. Kon. Akd. Nederl. **79**, 1976, 452—456.
50. Springer T. A. Characters of special groups. — Lecture Notes in Math., 131, Springer-Verlag, 1970, pp. 121—156. [Имеется перевод: Сприн-

гер Т. А. Характеры некоторых групп. — Семинар по алгебраическим группам. — М.: Мир, 1973, 118—161.]
51. Stanley R. P. Theory and application of plane partitions I, II. — Studies appl. Math. **50**, 1971, 167—188, 259—279.
52. Tamagawa T. On the ζ-functions of a division algebra. — Ann. Math. **77**, 1963, 387—405.
53. Thomas G. P. On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions. — Adv. in Math. **30**, 1978, 8—32.
54. Weil A. Number of solutions of equations in finite fields. — Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 1949, 497—508
55. Young A. Quantitative substitutional analysis I—IX. — Proc. London Math. Soc., 1901—1952.
56. Giambelli G. Z. Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche. — Atti Torino **38**, 1903, 823—844.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ [1])

1°. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
2°. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. — М.: Мир, 1982.
3°. Керов С. В. О правиле Литтлвуда — Ричардсона и соответствии Робинсона — Шенстеда — Кнута. — УМН, 1984, № 2.
4°. Юцис А. — А. А. Турниры и обобщенные таблицы Юнга. — Матем. заметки, т. 27, 1980, 175—178.
5°. Borho W., MacPherson R. Representations of Weyl groups and intersection homology of nilpotent varieties. — C. R. Acad. Sci. Paris **292**, 1981, 707—710.
6°. Franzblau D. S., Zeilberger D. A bijective proof of the hook-length formula. — J. Algorithms **3**, 1982, 317—343.
7°. Geissinger L. Hopf algebras of symmetric functions and class functions. — Lecture Notes in Math., 579, Springer-Verlag, 1977, pp. 168—181.
8°. Good I. J. Short proof of a conjecture of Dyson. — J. Math. Phys. **11**, 1970, 1884.
9°. Gustafson R. A., Milne S. C. Schur functions, Good's identity, and hypergeometric series well poised in $SU(n)$. — Adv. in Math. **48**, 1983, 177—188.
10°. Hotta R., Shimomura N. The fixed-point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions. Combinatorial and cohomological treatments centering GL_n. — Math. Ann. **241**, no 3, 1979, 193—208.
11°. James G., Kerber A. The representation theory of the symmetric group. — Encyclopedia of mathematics and its applications, 16, Addison-Wesley, 1981.
12°. James G., Peel M. Specht series for skew representations of symmetric groups. — J. Alg. **56**, 1979, 343—364.
13°. Lusztig G. Green polynomials and singularities of unipotent classes. — Adv. in Math. **42**, 1981, 169—178.
14°. Macdonald I. G. Polynomial functors and wreath products. — J. Pure Appl. Alg. **18**, 1980, 173—204.
15°. Macdonald I. G. Some conjectures for root systems. — SIAM J. Math. Anal. **13**, 1982, 988—1007.
16°. Mills W. H., Robbins D. P., and Rumsey, H. Jr. Proof of the Macdonald conjecture. — Invent. Math. **66**, 1982, 73—87.
17°. Shimomura N. A theorem on the fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold. — J. Math. Soc. Japan **32**, 1980, 55—64.

---

[1]) См. также библиографию в [19°]. — *Прим. перев.*

18°. Springer T. A., Zelevinsky A. V. Characters of $GL(n, F_q)$ and Hopf algebras. — J. London Math. Soc. 30, 1984, 27—43.

19°. Stanley R. P. Рецензия на настоящую книгу. — Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., **4**, 1981, 254—265.

20°. Stanley R. P. The generalized exponents of $CL(n, C)$ and the inner product of Schur functions. — Preprint, 1983.

21°. White D. Some connections between the Littlewood — Richardon rule and construction of Shensted. — J. Comb. Theory A **30**, 1981, 237—247.

22°. Zelevinsky A. V. Representations of finite classical groups. A Hopf algebra approach. — Lecture Notes in Math., 869, Springer-Verlag, 1981.

23°. Zelevinsky A. V. A generalization of the Littlewood — Richardson rule and the Robinson — Shensted — Knuth correspondence. — J Alg. **69**, 1981, 82—94.

24°. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. — Функц. анализ, т. **15**, № 4, 1981, с. 15—27.

25°. Вершик А. М., Керов С. В. K-функтор (группа Гротендика) бесконечной симметрической группы. — Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. **123**, 1983, с. 126—151.

26°. Клячко А. А. Централизаторы инволюций и модели симметрической и полной линейной групп. — Исследования по теории чисел, 7 — Саратов, 1978, с. 59—64.

27°. Клячко А. А. Модели для комплексных представлений групп $GL(n, q)$ и групп Вейля. — ДАН СССР, т. **261**, № 2, 1981, 275—278.

28°. Клячко А. А. Модели для комплексных представлений групп $GL(n, q)$. — Мат. сборник, т. **120**, № 3, 1983, с. 371—386.

29°. Сергеев А. Н. Представления супералгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ и $Q(n)$ в пространстве тензоров. — Функц. анализ, т. **18**, № 1, 1984, с. 80—81.

30°. Сергеев А. Н. Тензорная алгебра тождественного представления как модуль над супералгебрами Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ и $Q(n)$. — Мат. сборник, т. **123**, № 3, 1984, с. 422—430.

31*. Berele A., Regev A. Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras. — To appear in Advances in Mathematics.

32*. Farahat H. K. On the blocks of characters of symmetric groups. — Proc. London Math. Soc. (3) 6, 1956, 501—517.

33*. Foulkes H. O. Plethysm of S-functions. — Phil. Trans. Roy. Soc. London A246, 1954, 555—591.

34*. Gow R. Properties of characters of the general linear group related to the transpose-inverse involution. — Proc. London Math. Soc. (3) 47, 1983, 493—506.

35*. Kac V. G. Simple Lie groups and the Legendre symbol, Lecture Notes in Math., 848, 1981.

36°. Kerov S. V., Vershik A. M. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson — Schensted — Knuth algorithm. — To appear in SIAD J.

37*. Thrall R. M. On symmetrized Kronecker Powers and the structure of the free Lie ring. — Amer. J. Math. **64**, No 2, 1942, 371—388.

38°. Клячко А. А. Элементы Ли в тензорной алгебре. — Сиб. Мат. Журнал, т. XV, № 6, 1974, 1296—1304.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Глава I

Глава II

$\mathfrak{o}$	дискретно нормированное кольцо 114
$\mathfrak{p}$	максимальный идеал в $\mathfrak{o}$ 114
k	поле вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 114
$l(M)$	длина конечного $\mathfrak{o}$-модуля M 115
$a_\lambda(q)$	число автоморфизмов модуля типа λ 117
$G^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{o})$	число подмодулей в модуле типа λ, имеющих тип ν и котип μ 118
$H(\mathfrak{o})$	алгебра Холла кольца $\mathfrak{o}$ 118
$g_S(t)$, $g^\lambda_{\mu\nu}(t)$	многочлены Холла 123

Глава III

$R_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$	137
$v_m(t)$	$\varphi_m(t)/(1-t)^m$ 137
$v_\lambda(t)$	$\prod\limits_{i\geqslant 0} v_{m_i(\lambda)}(t)$ 138
$P_\lambda(x; t)$	симметрическая функция Холла — Литтлвуда 141
$q_r(x; t)$	$(1-t)P_{(r)}(x; t)$ $(r \geqslant 1)$ 142
$b_\lambda(t)$	$\prod\limits_{i\geqslant 1} \varphi_{m_i(\lambda)}(t)$ 143
$Q_\lambda(x; t)$	$b_\lambda(t)P_\lambda(x; t)$ 143
$q_\lambda(x; t)$	$q_{\lambda_1}(x; t)q_{\lambda_2}(x; t)\ldots$ 144
$f^\lambda_{\mu\nu}(t)$	коэффициент при P_λ в $P_\mu P_\nu$ 148
$z_\lambda(t)$	$z_\lambda \prod \left(1-t^{\lambda_i}\right)^{-1}$ 152
$S_\lambda(x; t)$	$\det\left(q_{\lambda_i - i + j}(x; t)\right)$ 153
$Q_{\lambda/\mu}$, $P_{\lambda/\mu}$	косые HL-функции 155
$\varphi_{\lambda/\mu}(t)$, $\psi_{\lambda/\mu}(t)$, $\varphi_T(t)$, $\psi_T(t)$	156, 157
$K(t)$	матрица перехода $M(s, P)$ 162
$X^\lambda_\rho(t)$	коэффициент при $P_\lambda(x; t)$ в $p_\rho(x)$ 168
$Q^\lambda_\rho(q)$	$q^{n(\lambda)}X^\lambda_\rho(q^{-1})$ (многочлены Грина) 169

Глава IV

k	конечное поле 174
q	число элементов k 174
$\bar{k}$	алгебраическое замыкание k 174
F	автоморфизм Фробениуса $x \mapsto x^q$ 174
k_n	расширение k степени n, содержащееся в $\bar{k}$ 174
M	мультипликативная группа $\bar{k}$ 174
M_n	мультипликативная группа k_n 174
$N_{n,m}$	норменный гомоморфизм $M_n \to M_m$ (когда m делит n) 174

L	$\varinjlim \hat{M}_n$ 174
L_n	подгруппа в L неподвижных точек относительно F^n 174
$\langle\xi, x\rangle_n$	спаривание между L_n и M_n 175
Φ	множество F-орбит в M-множество неприводимых многочленов в $k[t]$ со старшим коэффициентом 1 (отличных от t) 175
G_n	$GL_n(k)$ 175
μ	функция на Φ со значениями в разбиениях 176
$d(f)$	степень $f \in \Phi$ 176
$\\|\mu\\|$	$\sum_{f\in\Phi} d(f)\|\mu(f)\|$ 176
c_μ	класс сопряженности, параметризованный μ 176
q_f	$q^{d(f)}$ 177
a_μ	$\prod_{f\in\Phi} a_{\mu(f)}(q_f)$ — порядок централизатора элементов c_μ 177
$u_1 \circ \ldots \circ u_r$	произведение-индуцирование центральных функций 179
π_μ	характеристическая функция c_μ 180
A_n	пространство центральных функций на G_n 180
A	$\bigoplus_{n\geqslant 0} A_n$ 180
R_n	$\mathbb{Z}$-модуль, порожденный характерами G_n 180
R	$\bigoplus_{n\geqslant 0} R_n$ 181
B	$\mathbb{C}[e_n(f)\colon n\geqslant 1,\ f\in\Phi]$ 181
$\tilde{P}_\lambda(f)$	$q_f^{-n(\lambda)}P_\lambda(X_f;\ q_f^{-1})$ 181
$\tilde{Q}_\lambda(f)$	$a_\lambda(q_f)\tilde{P}_\lambda(f)$ 181
$\tilde{P}_\mu$	$\prod_{f\in\Phi}\tilde{P}_{\mu(f)}(f)$ 181
$\tilde{Q}_\mu$	$\prod_{f\in\Phi}\tilde{Q}_{\mu(f)}(f) = a_\mu\tilde{P}_\mu$ 181
ch	характеристическое отображение 181
$\tilde{p}_n(x)$	$p_{n/d}(f)$ $(x\in f,\ n$ кратно $d = d(f))$ 182
$\tilde{p}_n(\xi)$	$(-1)^{n-1}\sum_{x\in M_n}\langle\xi, x\rangle_n\tilde{p}_n(x)$ 183
Θ	множество F-орбит в L 183
$d(\varphi)$	число элементов в $\varphi\in\Theta$ 183
$P_r(\varphi)$	$\tilde{p}_{rd}(\xi)$ $(\xi\in\varphi,\ d = d(\varphi))$ 183
$s_\lambda(\varphi)$	S-функция от φ-переменных 183

λ	функция на Θ со значениями в разбиениях 183
$\Vert\lambda\Vert$	$\sum\limits_{\varphi\in\Theta} d(\varphi)\vert\lambda(\varphi)\vert$ 183
S_λ	$\prod\limits_{\varphi\in\Theta} s_{\lambda(\varphi)}(\varphi)$ 183
S	Z-подмодуль в B, порожденный элементами S_λ 183
χ^λ	неприводимый характер G_n 189
χ^λ_μ	значение χ^λ на классе c_μ 189
d_λ	$\chi^\lambda(1_n)$ — степень характера χ^λ 189

Глава V

F	неархимедово локальное поле 197
$\vert a\vert$	абсолютное значение $a\in F$ 197
$\mathfrak{o}$	кольцо целых поля F 197
$\mathfrak{p}$	максимальный идеал в $\mathfrak{o}$ 197
k	(конечное) поле вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 197
q	число элементов в k 198
π	образующая идеала $\mathfrak{o}$ 198
v	нормализованное нормирование на F^* 198
G	$GL_n(F)$ 198
G^+	$G\cap M_n(\mathfrak{o})$ 198
K	$GL_n(\mathfrak{o})$ 198
$L(G, K)$	(соотв. $L(G^+, K)$) пространство непрерывных комплекснозначных функций с компактным носителем на $K\diagdown G/K$ (соотв. $K\diagdown G^+/K$) 198
$f*g$	произведение-свертка в $L(G, K)$ 199
$H(G, K)$	(соотв. $H(G^+, K)$) кольцо Гекке пары (G, K) (соотв. (G^+, K)) 199
π^λ	$\mathrm{diag}(\pi^{\lambda_1}, \ldots, \pi^{\lambda_n})$ 199
c_λ	характеристическая функция $K\pi^\lambda K$ 200
ρ	$\frac{1}{2}(n-1, n-3, \ldots, 1-n)$ 203
ω	сферическая функция на G относительно K 203
$\hat\omega(f)$, $\hat f(\omega)$	преобразование Фурье функции $f\in$ $\in L(G, K)$ по ω 203
ω_s	сферическая функция с параметром $s=(s_1, \ldots, s_n)$ 204
G^+_m	$\{x\in G^+\colon\ v(\det x)=m\}$ 205
τ_m	характеристическая функция G^+_m 205
$\tau(X)$	ряд Гекке $\sum\limits_m \tau_m X^m$ 205
$\zeta(s, \omega)$	дзета-функция, определяемая ω 206

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ